INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXVI. BAND ZWEITES HEFT 1958

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 20. März 1958

Postverlagsort Berlin

Preis DM 11,60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **E. Mettler**. Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg

Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin W 35

Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Mainzer, J.-F., Die Spannungsverteilung in der Haut eines kugelförmigen Behälters bei tangentialer Krafteinleitung durch äquidistante Stützen in einem beliebigen Breitenkreis nach der Membrantheorie. Mit 4 Abbildungen 81

Meier-Dörnberg, K.-E., Experimentelle Bestimmung der Wölbfläche einer Vollkreismembran unter hydrostatischem Druck. Mit 1 Abbildung 93

Falk, S., Die Berechnung geschlossener Rahmentragwerke nach dem Reduktionsverfahren. Mit 17 Abbildungen 96

Schmieden, C., Nichtlineare Schwingungen bei zwei Freiheitsgraden. Mit 4 Abbildungen 110

Woinowsky-Krieger, S., Über die Beulsicherheit von Kreisplatten mit kreiszylindrischer Aelotropie. Mit 5 Abbildungen 129

Trostel, R., Wärmespannungen in Hohlzylindern mit temperaturabhängigen Stoffwerten. Mit 6 Abbildungen 134

Conway, H. D., The flexure of infinite rectangular plates of varying thickness. Mit 1 Abbildung 143

Jäckel, H., Mathematische Behandlung gesteuerter Abkühl- und Anwärmvorgänge 146

INGENIEUR-ARCHIV

XXVI. BAND ZWEITES HEFT 1958

Die Spannungsverteilung in der Haut eines kugelförmigen Behälters bei tangentialer Krafteinleitung durch äquidistante Stützen in einem beliebigen Breitenkreis nach der Membrantheorie

Von F.-J. Mainzer

1. Einleitung. Im Schrifttum wird häufig darauf hingewiesen, daß die Membrantheorie nicht imstande sei, den Spannungszustand geschlossener Rotationsschalen unter Wahrung ihres geometrischen Zusammenhanges bzw. unter Vermeidung von Singularitäten in der Spannungsverteilung zu beschreiben. Vielmehr müsse hierzu die Biegetheorie herangezogen werden. Im Falle einer idealisierten linienförmigen Einleitung von äußeren Kräften ist dies allerdings unumgänglich, selbst dann, wenn die äußeren Kräfte tangential zur Kugelhaut gerichtet sind. Es läßt sich jedoch nachweisen, daß die Membranspannungen in der Haut eines kugelförmigen Behälters unter Beanspruchungen, wie sie bei der Speicherung von Gasen oder Flüssigkeiten unter Druck und bei geeigneter flächenhafter Einleitung der Stützkräfte entstehen, überall stetig sind und beschränkt bleiben.

Die Anwendung der im folgenden zusammengestellten Ergebnisse auf ein rechnerisches Beispiel und die Gegenüberstellung der Membranspannungsverteilung mit einem entsprechenden, aus der Biegetheorie hergeleiteten Spannungszustand soll in einer späteren Untersuchung erfolgen.

2. Die Rotationsschale bei beliebiger Belastung. Die bekannten Differentialgleichungen der Membrantheorie für das Gleichgewicht der am Schalenelement einer beliebigen Rotationsfläche angreifenden äußeren und inneren Kräfte lauten[1]:

$$\left.\begin{aligned} r_2 \frac{\partial (N_\varphi \sin\varphi)}{\partial_\varphi} + r_1 \frac{\partial N_{\vartheta\varphi}}{\partial \vartheta} - r_1 N_\vartheta \cos\varphi + r_1 r_2 Y \sin\varphi = 0\,, \\ r_1 \frac{\partial N_\vartheta}{\partial \vartheta} + r_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi\vartheta} \sin\varphi) + r_1 N_{\vartheta\varphi} \cos\varphi + r_1 r_2 X \sin\varphi = 0\,, \\ r_2 N_\varphi - r_1 N \vartheta = - r_1 r_2 Z\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wie in Abb. 1 veranschaulicht, bedeuten hierbei r_1 und r_2 den Meridian- und Ringkrümmungshalbmesser, ϑ den Winkel zwischen einem Meridianschnitt und einer festen, die Drehachse enthaltenden Ebene, φ den Winkel zwischen einer Schalennormalen und der Drehachse, X, Y, Z die Komponenten einer äußeren Kraft je Flächeneinheit an der Stelle (ϑ, φ), N_φ, N_ϑ die inneren Normalkräfte je Längeneinheit des Breitenkreises bzw. des Meridians an der Stelle (ϑ, φ) und $N_{\varphi\vartheta}$, $N_{\vartheta\varphi}$ die inneren Schubkräfte je Längeneinheit des Breitenkreises bzw. des Meridians an der Stelle (ϑ, φ).

a) Die Kugel bei rotationssymmetrischer Belastung. Im Falle einer Kugel werden die Krümmungshalbmesser r_1 und r_2 einander gleich, und die weitere Voraussetzung der Rotationssymmetrie aller äußeren Kräfte bewirkt eine ebensolche der inneren Kräfte, so daß alle Ableitungen nach ϑ verschwinden. Damit vereinfachen sich die Differentialgleichungen (1) mit $r_1 = r_2 = r$ zu

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi \sin\varphi) - N_\vartheta \cos\varphi + r Y \sin\varphi = 0\,, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi\vartheta} \sin\varphi) + N_{\vartheta\varphi} \cos\varphi + r X \sin\varphi = 0\,, \\ N_\varphi + N_\vartheta = - r Z\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Bei der (im folgenden zumeist nur im Endergebnis aufgeführten) Integration der vorstehenden Gleichungen sind die auftretenden Integrationskonstanten jeweils so den gegebenen äußeren Kräften anzupassen, daß die inneren Spannungen überall in der Kugelhaut beschränkt bleiben.

---

[1] s. z. B. *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen. S. 21 ff. Berlin 1934.

Auf diese Weise können im einzelnen die rotationssymmetrischen Beanspruchungen der Kugelschale infolge Eigengewicht, Füllung, Innendruck und Schneelast ermittelt werden[1]. Der Vollständigkeit halber seien sie hier, bezogen auf einen beliebigen, festen Unterstützungsbreitenkreis Φ; $0 < \Phi < \pi$ mitgeteilt.

1) Die Kugel unter Eigengewicht. Die Komponenten der überall parallel zur Rotationsachse wirkend gedachten Flächenlast der Kugelschale tangential zum Meridian bzw. senkrecht auf die Haut sind

$$X = 0\,, \quad Y = \gamma_1 t \sin\varphi\,, \quad Z = \gamma_1 t \cos\varphi\,,$$

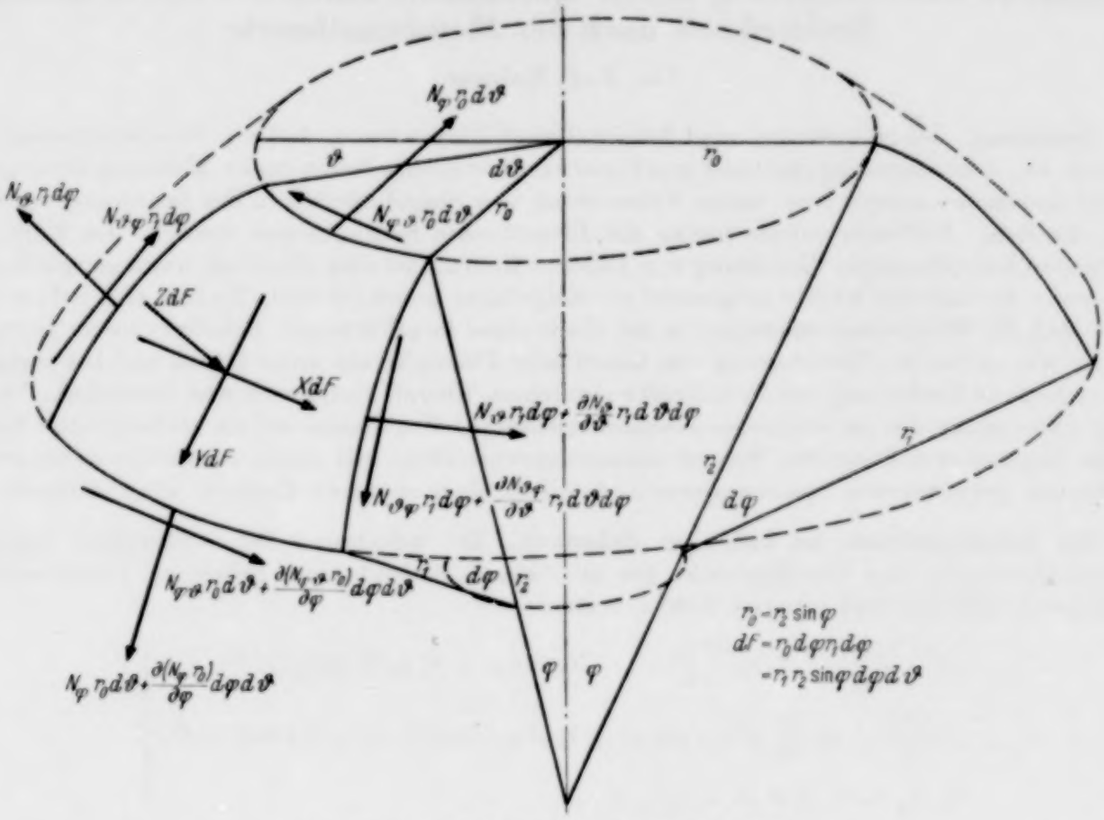


Abb. 1. Kräfte am Schalenelement einer Rotationsfläche.

wobei γ_1 das spezifische Gewicht und t die Wandstärke der Kugelschale bedeuten. Sie erzeugen oberhalb des Unterstützungskreises Φ die inneren Kräfte je Längeneinheit

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{r\gamma_1 t}{1+\cos\varphi}\,, \\ N_\vartheta &= -r\gamma_1 t\left(\cos\varphi - \frac{1}{1+\cos\varphi}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \Phi \tag{3}$$

und unterhalb des Unterstützungskreises die Schnittkräfte

$$\left.\begin{aligned} N_\vartheta &= \frac{r\gamma_1 t}{1-\cos\varphi}\,, \\ N_\vartheta &= -r\gamma_1 t\left(\cos\varphi + \frac{1}{1-\cos\varphi}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \Phi \leqq \varphi \leqq \pi\,. \tag{4}$$

2) Die Kugel unter Füllungslast. Oberhalb des Füllwinkels φ_0 verschwinden mit den äußeren Kräften auch die inneren. Unterhalb des Füllwinkels wird hydrostatischer Druck angenommen, der nur senkrecht auf die Schale wirkt:

$$X = Y = 0\,, \quad Z = -r\gamma_{II}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\,.$$

[1] Vgl. *W. Flügge*, a. a. O. S. 29f.

Er ruft oberhalb des Unterstützungskreises die Schnittkräfte

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{r^2\gamma_{II}}{6\sin^2\varphi}\left[2\cos^3\varphi - \cos\varphi_0\,(3\cos^2\varphi - \cos^2\varphi_0)\right], \\ N_\vartheta &= r^2\gamma_{II}\,(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) - N_\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \varphi_0 \leqq \varphi \leqq \Phi \tag{5}$$

und unterhalb des Unterstützungskreises die Schnittkräfte

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{r^2\gamma_{II}}{6\sin^2\varphi}\left[3\cos\varphi_0\sin^2\varphi + 2\,(\cos^3\varphi + 1)\right] \\ N_\vartheta &= r^2\gamma_{II}\,(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) - N_\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \Phi \leqq \varphi \leqq \pi\,. \tag{6}$$

hervor; γ_{II} kennzeichnet hierbei das spezifische Gewicht der Füllung.

3) Die Kugel unter Innendruck. Der Innendruck steht überall senkrecht auf der Kugelhaut und ist konstant:

$$X = Y = 0\,, \quad Z = -p\,.$$

Demzufolge sind auch die inneren Normalkräfte je Längeneinheit in jeder Richtung einander gleich:

$$N_\varphi = N_\varphi = \frac{1}{2}\,r\,p \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi\,. \tag{7}$$

4) Die Kugel unter Schneelast. Wird für die Schneelast p_s eine konstante Dicke der Schneedecke über der oberen Halbkugel zu Grunde gelegt, so haben die Lastkomponenten

$$X = 0\,, \quad Y = p_s \sin\varphi\,, \quad Z = p_s\cos\varphi$$

oberhalb des Äquators $\varphi = \pi/2$ die Schnittkräfte

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{r\,p_s}{1+\cos\varphi}\,, \\ N_\vartheta &= -\,r\,p_s\left(\cos\varphi - \frac{1}{1+\cos\varphi}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \tag{8}$$

zur Folge. Zwischen dem Äquator und dem nicht darüberliegend angenommenen Unterstützungskreis sind die Schnittkräfte

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{r\,p_s}{\sin^2\varphi}\,, \\ N_\vartheta &= \frac{r\,p_s}{\sin^2\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \Phi\,. \tag{9}$$

Unterhalb des Unterstützungskreises sind dann die aus der Schneelast stammenden inneren Kräfte gleich Null.

5) Die Schnittkraftdifferenzen im Unterstützungsbreitenkreis. Der Schnittkraftverlauf infolge Eigengewicht, Füllung und Schneelast weist in Höhe des Unterstützungskreises Φ für alle ϑ jeweils einen konstanten Sprung auf. Wird eine jede Schnittkraftdifferenz wie folgt festgelegt:

$$(\Delta N_\varphi)_{\varphi=\Phi} = (N_{\varphi\,(\Phi \leqq \varphi \leqq \pi)} - N_{\varphi\,(0 \leqq \varphi \leqq \Phi)})_{\varphi=\Phi} \tag{10a}$$

und entsprechend

$$(\Delta N_\vartheta)_{\varphi=\Phi} = (N_{\vartheta\,(\Phi \leqq \varphi \leqq \pi)} - N_{\vartheta\,(0 \leqq \varphi \leqq \Phi)})_{\varphi=\Phi}\,, \tag{10b}$$

ergibt sich als Differenz der Meridianschnittkräfte infolge Eigengewicht, Füllung, Innendruck und Schneelast der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned} (\Delta N_\varphi)_{\varphi=\Phi} &= \frac{2\,r\,\gamma_I\,t}{\sin^2\Phi}\,, \\ (\Delta N_\varphi)_{\varphi=\Phi} &= \frac{r^2\gamma_{II}}{6\sin^2\Phi}\,(2 + 3\cos\varphi_0 - \cos^3\varphi_0)\,, \\ (\Delta N_\varphi)_{\varphi=\Phi} &= 0\,, \\ (\Delta N_\varphi)_{\varphi=\Phi} &= \frac{r\,p_s}{\sin^2\Phi}\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Diese Schnittkraftdifferenzen ΔN_φ wären tangential an den zunächst linienförmig zu denkenden Stützring abzugeben. Ihre Vertikalkomponenten sind die je Längeneinheit des Stützringes über-

tragenen Lasten, die, mit dem Stützringumfang multipliziert, in der Summe das Gesamtgewicht der Kugel einschließlich Füllung und Schneelast darstellen.

Die Differenzen der Breitenkreisschnittkräfte stimmen auf Grund der dritten Gleichung (2) bis aufs Vorzeichen mit denen der Meridianschnittkräfte überein:

$$(\Delta N_\vartheta)_{\varphi=\Phi} = -(\Delta N_\varphi)_{\varphi=\Phi}. \tag{12}$$

b) Die Kugel bei äquidistanter Belastung. Im Hinblick auf die Ersetzung des umlaufenden Stützringes durch eine Anzahl $k \geqq 2$ von Einzelstützen, die über den Unterstützungsbreitenkreis äquidistant verteilt sind, wird als Belastung in Meridianrichtung gewählt

$$Y = Y_{nk} \cos n k \vartheta. \tag{13a}$$

Diese Gleichung gibt Veranlassung, die restlichen äußeren und die inneren Kräfte in Abhängigkeit von ϑ wie folgt anzusetzen[1]:

$$\left.\begin{aligned} X &= X_{nk} \sin n k \vartheta, \\ Z &= Z_{nk} \cos n k \vartheta, \\ N_\varphi &= N_{\varphi_{nk}} \cos n k \vartheta, \\ N_\vartheta &= N_{\vartheta_{nk}} \cos n k \vartheta, \\ N_{\varphi\vartheta} &= N_{\varphi\vartheta_{nk}} \sin n k \vartheta, \\ N_{\vartheta\varphi} &= N_{\vartheta\varphi_{nk}} \sin n k \vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{13b}$$

An die Stelle von (1) treten somit drei neue Differentialgleichungen, die die Gleichgewichtsbedingungen für rotationsasymmetrische, periodisch verteilte äußere Lasten enthalten:

$$\left.\begin{aligned} &r_2 \frac{\partial(N_{\varphi_{nk}} \sin\varphi)}{\partial\varphi} + r_1 n k N_{\vartheta\varphi_{nk}} - r_1 N_{\vartheta_{nk}} \cos\varphi + r_1 r_2 Y_{nk} \sin\varphi = 0, \\ &r_2 \frac{\partial(N_{\varphi\vartheta_{nk}} \sin\varphi)}{\partial\varphi} - r_1 n k N_{\vartheta_{nk}} + r_1 N_{\vartheta\varphi_{nk}} \cos\varphi + r_1 r_2 X_{nk} \sin\varphi = 0, \\ &r_2 N_{\varphi_{nk}} + r_1 N_{\vartheta_{nk}} + r_1 r_2 Z_{nk} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Die Elimination von $N_{\vartheta_{nk}}$ führt im Falle der Kugel auf zwei voneinander unabhängige lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten und Störfunktion für die Summe

$$U_{1_{nk}} = N_{\varphi_{nk}} + N_{\vartheta\varphi_{nk}}$$

und die Differenz

$$U_{2_{nk}} = N_{\varphi_{nk}} - N_{\vartheta_{nk}},$$

und zwar lauten diese

$$\begin{aligned} \frac{dU_{1_{nk}}}{d\varphi} + \left(2 \operatorname{ctg}\varphi + \frac{n k}{\sin\varphi}\right) U_{1\,nk} &= -r\left(X_{nk} + Y_{nk} + \frac{n k + \cos\varphi}{\sin\varphi} Z_{nk}\right), \\ \frac{dU_{2_{nk}}}{d\varphi} + \left(2 \operatorname{ctg}\varphi - \frac{n k}{\sin\varphi}\right) U_{2\,nk} &= \quad r\left(X_{nk} - Y_{nk} + \frac{n k - \cos\varphi}{\sin\varphi} Z_{nk}\right). \end{aligned}$$

Ihre Lösungen gewinnen nach Ausführung einiger Integrationen die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} U_{1_{nk}} &= \frac{\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}}{\sin^2\varphi}\left[C_{1_{nk}} - r\int\left(X_{nk} + Y_{nk} + \frac{n k + \cos\varphi}{\sin\varphi} Z_{nk}\right)\sin^2\varphi \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\right], \\ U_{2_{nk}} &= \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}}{\sin^2\varphi}\left[C_{2_{nk}} - r\int\left(-X_{nk} + Y_{nk} - \frac{n k - \cos\varphi}{\sin\varphi} Z_{nk}\right)\sin^2\varphi \left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\right]. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

[1] s. *W. Flügge*, a. a. O. S. 37 ff.

Um allgemeineren Belastungsfällen gerecht zu werden, sind die obigen Ansätze durch Summation endlich oder unendlich vieler Glieder der Lasten zu erweitern:

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{1}^{\infty} X_{nk} \sin n\,k\,\vartheta\,, \\ Y &= \sum_{1}^{\infty} Y_{nk} \cos n\,k\,\vartheta\,, \\ Z &= \sum_{1}^{\infty} Z_{nk} \cos n\,k\,\vartheta\,. \end{aligned}\right\} \tag{16a}$$

Dementsprechend lauten die Ansätze der Schnittkräfte

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi} &= \sum_{1}^{\infty} N_{\varphi_{nk}} \cos n\,k\,\vartheta\,, \\ N_{\vartheta} &= \sum_{1}^{\infty} N_{\vartheta_{nk}} \cos n\,k\,\vartheta\,, \\ N_{\vartheta\varphi} &= \sum_{1}^{\infty} N_{\vartheta\varphi_{nk}} \sin n\,k\,\vartheta\,. \end{aligned}\right\} \tag{16b}$$

Hierbei stellen dann die zu einem bestimmten Index $n\,k$ gehörenden Glieder der drei *Fourier*-Reihen jeweils die Lösung für die $n\,k$-te Harmonische der Lasten $X_{nk} \sin n\,k\,\vartheta$, $Y_{nk} \cos n\,k\,\vartheta$, $Z_{nk} \cos n\,k\,\vartheta$ dar.

Die in den Symmetriebedingungen der Ansätze (13) enthaltene Einschränkung entfällt, wenn die gerade cos-Funktion durch die ungerade sin-Funktion ersetzt wird und umgekehrt. Dann ergeben sich neue Lösungsformeln für N_{φ}, N_{ϑ} und $N_{\vartheta\varphi}$, die den alten überlagert werden können, so daß sich die inneren Spannungen für jeden Fall einer periodischen Belastung berechnen lassen.

1) Die Spannungsverteilung bei linienförmiger Stützung. Bei einer Ersetzung des umlaufenden linienförmigen Stützringes im Breitenkreis Φ durch k äquidistante und zunächst wiederum linienförmig anzunehmende Stützen von der Winkelbreite $2\,\gamma < 2\,\pi/k$ sind den Lösungen der Differentialgleichungen (2) für die rotationssymmetrische Belastung zusätzlich Lösungen der Differentialgleichungen (14) für einen rotationsasymmetrischen Spannungszustand mit den Flächenlasten $X_{nk} \sin n\,k\,\vartheta = Y_{nk} \cos n\,k\,\vartheta = Z_{nk} \cos n\,k\,\vartheta = 0$ für jedes $n\,k$ hinzuzufügen; $n = 1, 2, 3, \ldots$; $k =$ Stützenzahl. Die Lösungen der Differentialgleichungen (14) für dieses zu überlagernde Spannungssystem lauten dann unter Berücksichtigung von (15)

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi_{nk}} &= \frac{U_{1_{nk}} + U_{2_{nk}}}{2} = \frac{1}{2\sin^2\varphi}\left[C_{1_{nk}}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} + C_{2_{nk}}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\right], \\ N_{\vartheta\varphi_{nk}} &= \frac{U_{1_{nk}} - U_{2_{nk}}}{2} = \frac{1}{2\sin^2\varphi}\left[C_{1_{nk}}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} - C_{2_{nk}}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Diese Gleichungen gelten sowohl oberhalb als auch unterhalb des Unterstützungsbreitenkreises Φ jedoch mit verschiedenen Konstanten $C_{1_{nk}}$, $C_{2_{nk}}$.

Damit die Spannungen an den Polen der Kugel endlich bleiben, muß für die Kugelschale oberhalb des Unterstützungsbreitenkreises Φ

$$\bar{C}_{1_{nk}} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und für die Kugelschale unterhalb des Unterstützungsbreitenkreises

$$\underline{C}_{2_{nk}} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

sein.

Die restlichen Integrationskonstanten $\underline{C}_{1_{nk}}$ und $\bar{C}_{2_{nk}}$ bestimmen sich aus der Forderung, daß das zu überlagernde Spannungssystem die Summe $\sum \Delta N_{\varphi}$ der Meridianschnittkraftdifferenzen gemäß den Gleichungen (11) zwischen den Stützen gerade aufhebt und in den Stützen selbst — entsprechend ihrer geringeren Tragbreite — erhöht.

Wie in Abb. 2 (S. 88) veranschaulicht, muß dann aus Gleichgewichtsgründen

$$p_3 = p_2 - p_1 = \frac{\alpha - \gamma}{\gamma}\, p_1$$

sein, wenn p_1 die senkrechte Last je Längeneinheit im umlaufenden Stützring, d. i. die Vertikalkomponente der Summe $\sum \Delta N_{\varphi}$ der Meridianschnittkraftdifferenzen gemäß den Gleichungen (11),

p_2 die senkrechte Last je Längeneinheit in den einzelnen Stützen und $p_3 = p_2 - p_1$ die der rotationssymmetrischen Lastverteilung zu überlagernde rotationsasymmetrische senkrechte Last je Längeneinheit in den Stützen bedeuten.

Die Sprünge der zu überlagernden Spannungen betragen demnach, als Funktion $p(\vartheta)$ betrachtet,

$$\begin{aligned} &\text{für} \quad \nu\, 2\alpha - \gamma < \vartheta < \nu\, 2\alpha + \gamma \quad &&: \quad p(\vartheta) = p_3 = \frac{\alpha - \gamma}{\gamma}\, p_1\,, \\ &\text{für} \quad \nu\, 2\alpha + \gamma < \vartheta < (\nu+1)\, 2\alpha - \gamma \quad &&: \quad p(\vartheta) = -\, p_1\,. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der *Fourier*-Darstellung

$$p(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, p_1}{n\, k\, \gamma} \sin n\, k\, \gamma \cos n\, k\, \vartheta \tag{18}$$

werden die zu überlagernden Spannungssprünge im Unterstützungskreis

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\Delta N_{\varphi_{nk}}\right)_{\varphi = \Phi} \cos n\, k\, \vartheta = \frac{1}{2 \sin^2 \varphi} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left[\underline{C}_{1_{nk}} \left(\operatorname{ctg} \frac{\Phi}{2}\right)^{nk} - \overline{C}_{2_{nk}} \left(\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}\right)^{nk}\right] \cos n\, k\, \vartheta$$

$$= \frac{1}{\sin \Phi} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{2\, p_1}{n\, k\, \gamma} \sin n\, k\, \gamma \cos n\, k\, \vartheta\,. \tag{19a}$$

Da die Schubspannungen $N_{\vartheta \varphi_{nk}}$ im rotationssymmetrischen Spannungszustand überall gleich Null sind und im rotationsasymmetrischen Zustand keine Spannungssprünge von $N_{\vartheta \varphi_{nk}}$ im Unterstützungsbreitenkreis zwischen den Stützen auftreten dürfen, muß außerdem gelten

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\Delta N_{\vartheta \varphi_{nk}}\right)_{\varphi = \Phi} \sin n\, k\, \vartheta = \frac{1}{2 \sin^2 \varphi} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left[\underline{C}_{1_{nk}} \left(\operatorname{ctg} \frac{\Phi}{2}\right)^{nk} + \overline{C}_{2_{nk}} \left(\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}\right)^{nk}\right] \sin n\, k\, \vartheta \equiv 0\,. \tag{19b}$$

So ergibt sich für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein inhomogenes Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten $C_{1_{nk}}$ und $C_{2_{nk}}$ und mit nichtverschwindender Determinante. Durch Einsetzen seiner Lösungen in die Gleichungen für N_φ, N_ϑ und $N_{\vartheta\varphi}$ lassen sich diese wie folgt schreiben:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{p_1 \sin \Phi}{\sin^2 \varphi} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\Phi}{2}}\right)^{nk} \frac{\sin n\, k\, \gamma \cos n\, k\, \vartheta}{n\, k\, \gamma} \quad (\Phi \leqq \varphi \leqq \pi)\,, \\ N_\varphi &= -\frac{p_1 \sin \Phi}{\sin^2 \varphi} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}}\right)^{nk} \frac{\sin n\, k\, \gamma \cos n\, k\, \vartheta}{n\, k\, \gamma} \quad (0 \leqq \varphi \leqq \Phi)\,, \\ N_\vartheta &= -\, N_\varphi\,, \\ N_{\vartheta\varphi} &= \frac{p_1 \sin \Phi}{\sin^2 \varphi} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\Phi}{2}}\right)^{nk} \frac{\sin n\, k\, \gamma \sin n\, k\, \vartheta}{n\, k\, \gamma} \quad (\Phi \leqq \varphi \leqq \pi)\,, \\ N_{\vartheta\varphi} &= \frac{p_1 \sin \Phi}{\sin^2 \varphi} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}}\right)^{nk} \frac{\sin n\, k\, \gamma \sin n\, k\, \vartheta}{n\, k\, \gamma} \quad (0 \leqq \varphi \leqq \Phi)\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Die vorstehenden unendlichen Reihen können mit Hilfe der nachfolgenden Beziehungen auch in geschlossene Ausdrücke verwandelt werden[1]:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}{}' u^n \frac{\sin n\, x}{n} &= \operatorname{arc\,tg} \frac{u \sin x}{1 - u \cos x}\,, \\ \sum_{n=1}^{\infty}{}' u^n \frac{\cos n\, x}{n} &= -\frac{1}{2} \ln (1 - 2\, u \cos x + u^2)\,, \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} |u| \leqq 1 \\ \text{und} \\ u \cos x \neq 1 \end{matrix}$$

[1] s. z. B. Hütte, Band I, 28. Aufl., S. 169 unter m) und k). Berlin 1955.

$$\sin n k \gamma \cos n k \vartheta = \frac{1}{2} \sin n k (\gamma + \vartheta) + \frac{1}{2} \sin n k (\gamma - \vartheta),$$

$$\sin n k \gamma \sin n k \vartheta = -\frac{1}{2} \cos n k (\gamma + \vartheta) + \frac{1}{2} \cos n k (\gamma - \vartheta).$$

Die Spannungen in der Kugelhaut lauten dann, außer an den Rändern der linienförmigen Stützen (das sind die Stellen $\vartheta = \nu\, 2\alpha \pm \gamma$; $\nu = 0, \ldots, k-1$) im Unterstützungsbreitenkreis Φ,

$$\left.\begin{aligned}
N_{\varphi_0 \le \varphi \le \Phi} &= -\frac{p_1 \sin \Phi}{2 k \gamma \sin^2 \varphi} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}}\right)^k \sin k(\gamma+\vartheta)}{1 - \left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}}\right)^k \cos k(\gamma+\vartheta)} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}}\right)^k \sin k(\gamma-\vartheta)}{1 - \left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}}\right)^k \cos k(\gamma-\vartheta)} \right], \\
N_{\varphi_\Phi \le \varphi \le \pi} &= \frac{p_1 \sin \Phi}{2 k \gamma \sin^2 \varphi} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\left(\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\Phi}{2}}\right)^k \sin k(\gamma+\vartheta)}{1 - \left(\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\Phi}{2}}\right)^k \cos k(\gamma+\vartheta)} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\left(\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\Phi}{2}}\right)^k \sin k(\gamma-\vartheta)}{1 - \left(\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\Phi}{2}}\right)^k \cos k(\gamma-\vartheta)} \right], \\
N_{\vartheta \varphi_0 \le \varphi \le \Phi} &= \frac{p_1 \sin \Phi}{4 k \gamma \sin^2 \varphi} \ln \frac{1 - 2\left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}}\right)^k \cos k(\gamma+\vartheta) + \left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}}\right)^{2k}}{1 - 2\left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}}\right)^k \cos k(\gamma-\vartheta) + \left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}}\right)^{2k}}, \\
N_{\vartheta \varphi_\Phi \le \varphi \le \pi} &= \frac{p_1 \sin \Phi}{4 k \gamma \sin^2 \varphi} \ln \frac{1 - 2\left(\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\Phi}{2}}\right)^k \cos k(\gamma+\vartheta) + \left(\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\Phi}{2}}\right)^{2k}}{1 - 2\left(\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\Phi}{2}}\right)^k \cos k(\gamma-\vartheta) + \left(\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\Phi}{2}}\right)^{2k}}.
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Während die beiden Gleichungen für N_φ zeigen, daß an den fraglichen Stellen die zu überlagernden inneren Normalspannungen beschränkt bleiben, lassen die Gleichungen für $N_{\vartheta\varphi}$ erkennen, daß die zu überlagernden inneren Schubspannungen an den Rändern der linienförmigen Stützen über alle Grenzen wachsen.

2) Die Spannungsverteilung bei flächenhafter Stützung. Die vorgenannten Singularitäten heben sich auf, wenn die linienförmige Stützung der Kugel im Unterstützungsbreitenkreis Φ, wie in Abb. 3 dargestellt, von einer flächenhaften Stützung mittels k Pratzenblechen der Winkelhöhe $\beta' + \beta''$ und der Winkelbreite 2γ abgelöst wird. In den Bereichen $\Phi - \beta' \le \varphi \le \Phi + \beta''$ mit $\nu\, 2\alpha - \gamma \le \vartheta \le \nu\, 2\alpha + \gamma$ ($\nu = 1, \ldots, k$) bewirken die Pratzenbleche dann einen tangentialen Flächenlastangriff $Y = Y(\vartheta, \varphi) = 0$ auf die Kugelhaut, deren Membranspannungszustand auf die Weise entwickelt werden kann, daß den bereits ermittelten Spannungen gemäß den Gleichungen (3) bis (9) und (21) zusätzlich Lösungen der Differentialgleichungen (14) überlagert werden. Diese müssen so beschaffen sein, daß in den Stützen je Längeneinheit ihres Breitenkreisumfanges die Kraft p_2 auf die Pratzenbleche übertragen und zugleich die von der linienförmigen Stützung herrührenden Spannungssprünge im Unterstützungsbreitenkreis Φ aufgehoben werden.

Der Verlauf der in Abb. 3 veranschaulichten Stützkräfte ist, als Funktion $q(\vartheta)$ betrachtet, in den Intervallen

$$\begin{aligned} \nu\, 2\alpha - \gamma < \vartheta < \nu\, 2\alpha + \gamma \quad &: \quad q(\vartheta) = -p_2 = -\frac{\alpha}{\gamma} p_1 , \\ \nu\, 2\alpha + \gamma < \vartheta < (\nu+1)\, 2\alpha - \gamma \quad &: \quad q(\vartheta) = 0; \quad \nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1 . \end{aligned}$$

Hierzu gehört die *Fourier*-Entwicklung

$$q(\vartheta) = -p_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 p_1}{n k \gamma} \sin n k \gamma \cos n k \vartheta = +a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \cos n k \vartheta . \tag{22}$$

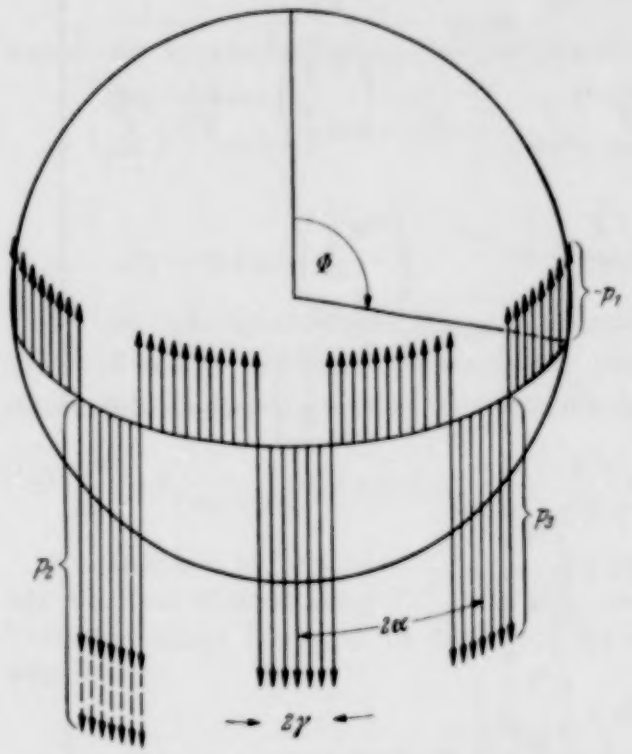


Abb. 2. Die im Unterstützungsbreitenkreis Φ zu überlagernden Spannungssprünge.

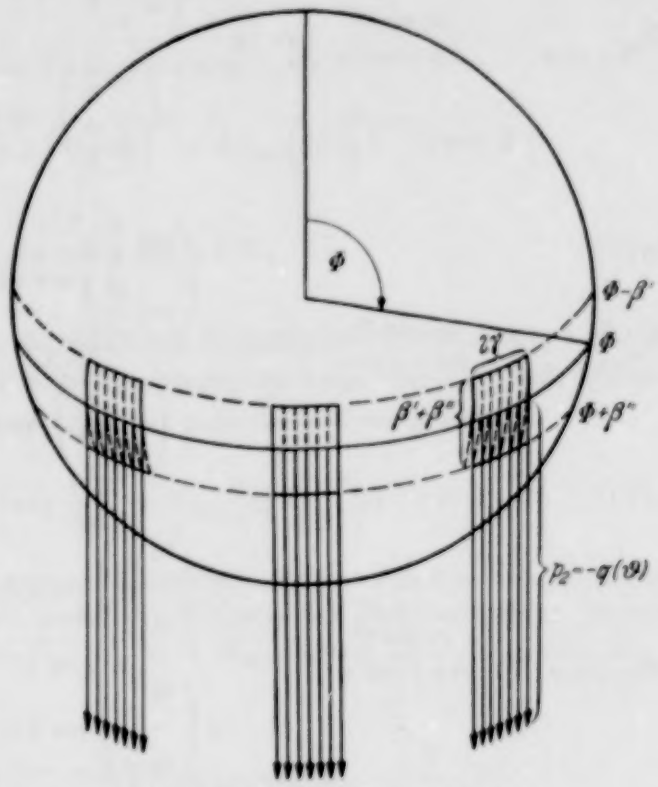


Abb. 3. Flächenhafte Stützung mittels Pratzenblechen.

Die Verteilung von $q(\vartheta)$ über der Winkelhöhe φ des Pratzenbleches richtet sich nach der Vorschrift $Y(\vartheta,\varphi)$, die in der Praxis allerdings meist ungewiß sein dürfte, und über die daher zunächst nicht weiter verfügt werden soll, wenn nur beachtet wird, daß gemäß Abb. 4

$$\int_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''} Y_{nk} \sin\varphi \, dF = a_{nk} \sin\Phi \, r \, d\vartheta \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

ist. Wegen $dF = (r\, d\varphi)(r \sin\varphi\, d\vartheta)$ gilt ferner die später benötigte Beziehung

$$r \int_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''} Y_{nk} \sin^2\varphi \, d\varphi = a_{nk} \sin\Phi \ (\mathrm{n} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) . \tag{23}$$

Im Falle des konstanten Anteils a_0 der *Fourier*-Entwicklung (22) ergeben sich die Schnittkräfte N_φ, N_ϑ und $N_{\vartheta\varphi}$ mit Hilfe der Gleichungen (15) allgemein auf der ganzen Kugel zu

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{1}{\sin^2\varphi} r \left(\int Y_0 \sin^2\varphi\right) d\varphi + C) , \\ N_\vartheta &= -N_\varphi , \\ N_{\vartheta\varphi} &= 0 . \end{aligned}$$

Oberhalb $\Phi-\beta'$ und unterhalb $\Phi+\beta''$ ist $Y_0 = 0$. Zusammen mit den Endlichkeitsbedingungen an den Polen der Kugel folgt also dort

$$N_\varphi = N_\vartheta = 0 . \tag{24a}$$

Zur Festlegung der Integrationskonstanten in den Bereichen $\Phi-\beta' \leqq \varphi \leqq \Phi$ und $\Phi \leqq \varphi \leqq \Phi+\beta''$ ist zu beachten, daß an den Stellen $\Phi-\beta'$ und $\Phi+\beta''$ keine Spannungssprünge vorhanden sein

dürfen. Demnach werden die Spannungen im Bereich $\Phi-\beta' \leqq \varphi \leqq \Phi$

$$N_\varphi = -N_\vartheta = -\frac{r}{\sin^2\varphi}\int_{\Phi-\beta'}^{\varphi\leqq\Phi} Y_0 \sin^2\varphi\, d\varphi \qquad (24b)$$

und im Bereich $\Phi \leqq \varphi \leqq \Phi+\beta''$

$$N_\varphi = -N_\vartheta = \frac{r}{\sin^2\varphi}\int_{\varphi\leqq\Phi}^{\Phi+\beta''} Y_0 \sin^2\varphi\, d\varphi\,. \qquad (24c)$$

Die überall auf der Kugel gültigen Lösungen der Differentialgleichungen (14) lauten im Falle der veränderlichen Summenglieder von (22)

$$N_\varphi = -N_\vartheta = \frac{1}{2\sin^2\varphi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\left[C_{1_{nk}} - r\int Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}d\varphi\right]\cos n\,k\,\vartheta\right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\left[C_{2_{nk}} - r\int Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}d\varphi\right]\cos n\,k\,\vartheta\right\},$$

$$N_{\vartheta\varphi} = N_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{2\sin^2\varphi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\left[C_{1_{nk}} - r\int Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}d\varphi\right]\sin n\,k\,\vartheta\right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\left[C_{2_{rk}} - r\int Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}d\varphi\right]\sin n\,k\,\vartheta\right\}.$$

Die Integrationskonstanten

$$C_{i_{nk}}\ (i=1,2)$$

sind für die vier Bereiche

$$0 \leqq \varphi \leqq \Phi-\beta',$$
$$\Phi-\beta' \leqq \varphi \leqq \Phi,$$
$$\Phi \leqq \varphi \leqq \Phi+\beta''$$
und $$\Phi+\beta'' \leqq \varphi \leqq \pi$$

im einzelnen wie folgt festzulegen:

Oberhalb und unterhalb der Pratzenbleche (das sind die Bereiche

$$0 \leqq \varphi \leqq \Phi-\beta'$$

und

$$\Phi+\beta'' \leqq \varphi \leqq \pi)$$

verschwinden mit den Flächenlasten Y_{nk} aus Endlichkeitsgründen auch die Integrationskonstanten $C_{1_{nk}}$ bzw. $C_{2_{nk}}$.

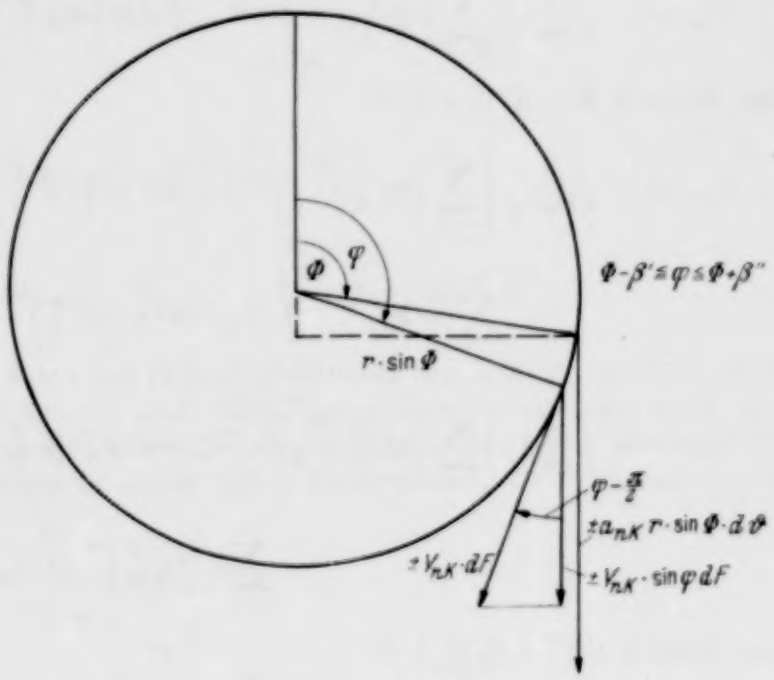


Abb. 4. Zusammenhang zwischen $\int_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''} Y_{nk}\sin\varphi\, dF$ und a_{nk}.

Zur Berechnung der noch unbekannten sechs restlichen Integrationskonstanten lassen sich vier Bestimmungsgleichungen aus der Forderung gewinnen, daß weder der Spannungsverlauf von N_φ noch der von $N_{\vartheta\varphi}$ an den Stellen $\Phi-\beta'$ und $\Phi+\beta''$ unstetig werden darf:

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi_{0\leqq\varphi\leqq\Phi-\beta'}} &= N_{\varphi_{\Phi-\beta'\leqq\varphi\leqq\Phi}} \\ N_{\vartheta\varphi_{0\leqq\varphi\leqq\Phi-\beta'}} &= N_{\vartheta\varphi_{\Phi-\beta'\leqq\varphi\leqq\Phi}} \end{aligned}\right\} \text{ für } \varphi=\Phi-\beta',$$

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi_{\Phi\leqq\varphi\leqq\Phi+\beta''}} &= N_{\varphi_{\Phi+\beta''\leqq\varphi\leqq\pi}} \\ N_{\vartheta\varphi_{\Phi\leqq\varphi\leqq\Phi+\beta''}} &= N_{\varphi_{\Phi+\beta''\leqq\varphi\leqq\pi}} \end{aligned}\right\} \text{ für } \varphi=\Phi+\beta''.$$

Eine weitere Gleichung ergibt sich daraus, daß in dem endgültigen überlagerten Spannungssystem die Meridianspannungen N_φ auch am Unterstützungsbreitenkreis Φ stetig sein müssen. Das bedeutet, daß die neue, nun zu ermittelnde Spannungsverteilung die von der linienförmigen Stützung herrührenden Spannungssprünge im Unterstützungsbreitenkreis gemäß Gleichung (22) dort gerade aufzuheben hat:

$$\Delta N_\varphi = -\frac{1}{\sin\Phi}\left(p_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,p_1}{n\,k\,\gamma}\sin n\,k\,\gamma\cos n\,k\,\vartheta\right) \quad \text{für} \quad \varphi = \Phi .$$

Schließlich müssen die Schubspannungen in der neuen Spannungsverteilung an der Stelle Φ stetig sein:

$$N_{\vartheta\varphi_{(\Phi-\beta'\leq\varphi\leq\Phi)}} = N_{\vartheta\varphi_{(\Phi\leq\varphi\leq\Phi+\beta'')}} \quad \text{für} \quad \varphi = \Phi .$$

Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen ist die Darstellung einer Funktion durch eine *Fourier*-Reihe eindeutig, so daß dann für jedes nk mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein inhomogenes Gleichungssystem von sechs linearen und unabhängigen Gleichungen mit nichtverschwindender Determinante in den unbekannten Integrationskonstanten existiert. Mittels der eindeutigen Lösung können also die Spannungen aus der flächenhaften Stützung auch im Falle der veränderlichen Summenglieder (22) angegeben werden. Die Überlagerung mit den von der linienförmigen Einzelstützung [siehe die Gleichungen (20)] und den vom konstanten Anteil der flächenhaften Stützung [siehe die Gleichungen (24)] herrührenden Spannungen ergibt im Bereich $0 \leqq \varphi \leqq \Phi - \beta'$:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{r}{2\sin^2\varphi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\int_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''} Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\cos n\,k\,\vartheta\,, \\ N_{\vartheta\varphi} &= -\frac{r}{2\sin^2\varphi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\int_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''} Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\sin n\,k\,\vartheta\,, \end{aligned}\right\} \tag{25a}$$

im Bereich $\Phi - \beta' \leqq \varphi \leqq \Phi$:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{r}{2\sin^2\varphi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\int_{\varphi}^{\Phi+\beta''} Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\cos n\,k\,\vartheta\right. \\ &\qquad \left. -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\int_{\Phi-\beta'}^{\varphi} Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\cos n\,k\,\vartheta - 2\int_{\Phi-\beta'}^{\varphi} Y_0\sin^2\varphi\,d\varphi\right], \\ N_{\vartheta\varphi} &= -\frac{r}{2\sin^2\varphi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\int_{\varphi}^{\Phi+\beta''} Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\sin n\,k\,\vartheta\right. \\ &\qquad \left. +\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\int_{\Phi-\beta'}^{\varphi} Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\sin n\,k\,\vartheta\,, \right. \end{aligned}\right\} \tag{25b}$$

im Bereich $\Phi \leqq \varphi \leqq \Phi + \beta''$:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{r}{2\sin^2\varphi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\int_{\varphi}^{\Phi+\beta''} Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\cos n\,k\,\vartheta\right. \\ &\qquad \left. -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\int_{\Phi-\beta'}^{\varphi} Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\cos n\,k\,\vartheta + 2\int_{\varphi}^{\Phi+\beta''} Y_0\sin^2\varphi\,d\varphi\right], \\ N_{\vartheta\varphi} &= -\frac{r}{2\sin^2\varphi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\int_{\varphi}^{\Phi+\beta''} Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\sin n\,k\,\vartheta\right. \\ &\qquad \left. +\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\int_{\Phi-\beta'}^{\varphi} Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\sin n\,k\,\vartheta\,, \right. \end{aligned}\right\} \tag{25c}$$

im Bereich $\Phi + \beta'' \leqq \varphi \leqq \pi$:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{r}{2\sin^2\varphi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\int_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''} Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\cos n\,k\,\vartheta\,, \\ N_{\vartheta\varphi} &= \frac{r}{2\sin^2\varphi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk}\int_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''} Y_{nk}\sin^2\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\sin n\,k\,\vartheta\,. \end{aligned}\right\} \tag{25d}$$

Bei näherem Zusehen erscheint es schwierig, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergrenz der auftretenden unendlichen Reihen in Eigenschaften der Funktionen $Y_{nk} = Y_{nk}(\varphi)$ auszudrücken. Jedoch läßt sich für den Fall bezüglich φ konstanten Flächenlastangriffes $Y = \sum Y_{nk}\cos n\,k\,\vartheta$ mit bezüglich φ konstanten Y_{nk} die gleichmäßige Konvergenz der unendlichen Reihen und die Beschränktheit aller Spannungen leicht nachweisen.

Auf Grund der Gleichungen (22) und (23) muß dann

$$\left.\begin{aligned} Y_0 &= \frac{a_0\sin\Phi}{r\int_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''}\sin^2\varphi\,d\varphi} = -\frac{p_1\sin\Phi}{r\int_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''}\sin^2\varphi\,d\varphi}\,, \\ Y_{nk} &= \frac{a_{nk}\sin\Phi}{r\int_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''}\sin^2\varphi\,d\varphi} = -\frac{2\,p_1\sin\Phi}{r\int_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''}\sin^2\varphi\,d\varphi}\,\frac{\sin n\,k\,\gamma}{n\,k\,\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

sein. Es bleiben noch die Integrale der Formen

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\delta_3}{2}\right)^{nk}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sin^2\varphi\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi\,,$$

und

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\delta_4}{2}\right)^{nk}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sin^2\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi$$

mit

$$0 \leqq \delta_3 \leqq \delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \delta_4 \leqq \pi \quad \text{und} \quad \Phi - \beta' \leqq \delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \Phi + \beta''$$

auszuwerten.

Die exakte Berechnung dieser Integrale führt auf Rekurionsformeln die, mit Y_{nk} und $\cos n\,k\,\vartheta$ bzw. $\sin n\,k\,\vartheta$ multipliziert, schwierig zu summieren sind. Wohl lassen sich die Integrale leicht abschätzen, wobei zwar brauchbare Abschätzungen der Höchstspannungen für jeden Breitenkreis zu gewinnen sind, der Verlauf der Spannungen in einem jeden Breitenkreis, als Funktion von ϑ betrachtet, jedoch verschleiert wird.

Mit Hilfe der Substitutionen $z = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ bzw. $z = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ folgt

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\delta_3}{2}\right)^{nk}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sin^2\varphi\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi \leqq 2\left(\operatorname{tg}\frac{\delta_3}{2}\right)^{nk}\int_{\operatorname{ctg}\frac{\delta_2}{2}}^{\operatorname{ctg}\frac{\delta_3}{2}}\frac{z^{nk}}{1+z^2}\,dz \leqq \frac{\operatorname{ctg}\frac{\delta_1}{2}}{1+\left(\operatorname{ctg}\frac{\delta_2}{2}\right)^2}\,\frac{2}{n\,k}$$

und entsprechend

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\delta_4}{2}\right)^{nk}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sin^2\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{nk} d\varphi \leqq 2\left(\operatorname{ctg}\frac{\delta_4}{2}\right)^{nk}\int_{\operatorname{tg}\frac{\delta_1}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{\delta_2}{2}}\frac{z^{nk}}{1+z^2}\,dz \leqq \frac{\operatorname{tg}\frac{\delta_2}{2}}{1+\left(\operatorname{tg}\frac{\delta_1}{2}\right)^2}\,\frac{2}{n\,k}\,.$$

Zu den Normalspannungen N_φ und $N_\vartheta = -N_\varphi$ gemäß den Gleichungen (3) bis (9) und den Schubspannungen $N_{\vartheta\varphi} \equiv 0$, die von den verschiedenen Belastungen bei linienförmiger umlaufender Stützung herrühren, treten also noch folgende Höchstspannungen aus der flächenhaften Einzelstützung hinzu, und zwar

im Bereich $0 \leqq \varphi \leqq \Phi - \beta'$:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{2}{\sin^2(\Phi-\beta')}\,\frac{p_1 \sin\Phi}{\int\limits_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''} \sin^2\varphi\, d\varphi}\,\frac{\operatorname{ctg}\dfrac{\Phi-\beta'}{2}}{1+\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\Phi+\beta''}{2}\right)^2}\,\frac{\pi^2}{6k^2\gamma}, \\ N_{\vartheta\varphi} &= \pm\frac{2}{\sin^2(\Phi-\beta')}\,\frac{p_1 \sin\Phi}{\int\limits_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''} \sin^2\varphi\, d\varphi}\,\frac{\operatorname{ctg}\dfrac{\Phi-\beta'}{2}}{1+\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\Phi+\beta''}{2}\right)^2}\,\frac{\pi^2}{6k^2\gamma}, \end{aligned}\right\} \tag{27a}$$

im Bereich $\Phi + \beta'' \leqq \varphi \leqq \pi$:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{2}{\sin^2(\Phi+\beta'')}\,\frac{p_1 \sin\Phi}{\int\limits_{\Phi-\beta}^{\Phi+\beta''} \sin^2\varphi\, d\varphi}\,\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\Phi+\beta''}{2}}{1+\left(\operatorname{tg}\dfrac{\Phi-\beta'}{2}\right)^2}\,\frac{\pi^2}{6k^2\gamma}, \\ N_{\vartheta\varphi} &= \pm\frac{2}{\sin^2(\Phi+\beta'')}\,\frac{p_1 \sin\Phi}{\int\limits_{\Phi-\beta'}^{\Phi+\beta''} \sin^2\varphi\, d\varphi}\,\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\Phi+\beta''}{2}}{1+\left(\operatorname{tg}\dfrac{\Phi-\beta'}{2}\right)^2}\,\frac{\pi^2}{6k^2\gamma}, \end{aligned}\right\} \tag{27b}$$

im Bereich $\Phi - \beta' \leqq \varphi \leqq \Phi$:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= -\max\left\{\left|N_{\varphi_{(0\leq\varphi\leq\Phi-\beta')}}\right|,\ \left|N_{\varphi_{(\Phi+\beta''\leq\varphi\leq\pi)}}\right|\right\} - 2\int\limits_{\Phi-\beta'}^{\varphi} Y_0 \sin^2\varphi\, d\varphi, \\ N_{\vartheta\varphi} &= \pm\max\left\{\left|N_{\vartheta\varphi_{(0\leq\varphi\leq\Phi-\beta')}}\right|,\ \left|N_{\vartheta\varphi_{(\Phi+\beta''\leq\varphi\leq\pi)}}\right|\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{27c}$$

im Bereich $\Phi \leqq \varphi \leqq \Phi + \beta''$:

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= \max\left\{\left|N_{\varphi_{(0\leq\varphi\leq\Phi-\beta')}}\right|,\ \left|N_{\varphi_{(\Phi+\beta''\leq\varphi\leq\pi)}}\right|\right\} + 2\int\limits_{\Phi-\beta'}^{\varphi} Y_0 \sin\varphi\, d\varphi, \\ N_{\vartheta\varphi} &= \pm\max\left\{\left|N_{\vartheta\varphi_{(0\leq\varphi\leq\Phi-\beta')}}\right|,\ \left|N_{\vartheta\varphi_{(\Phi+\beta''\leq\varphi\leq\pi)}}\right|\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{27d}$$

Wie die Gleichungen (25) zeigen, fallen die Spannungen aus der flächenhaften Einzelstützung von den Breitenkreisen $\Phi - \beta'$ und $\Phi + \beta''$ gegen die Pole zu bei einer Stützenzahl $k \geqq 3$ rasch nach Null und für $k = 2$ auf einen von Null verschiedenen kleinen Wert monoton ab. Im übrigen hat die gleichmäßige Konvergenz der mit konstanten Y_{nk} gebildeten unendlichen Reihen zur Folge, daß in dem vollständig überlagerten Spannungssystem alle Spannungen der Kugelhaut stetige Funktionen der beiden Veränderlichen ϑ und φ sind. Schließlich sei darauf hingewiesen, daß sich die Meridianspannungen des überlagerten Spannungssystems bei der Krafteinleitung durch äquidistante Stützen keineswegs im Verhältnis des vollen Stützringumfanges $2\pi r \sin\Phi$ zur verminderten Tragbreite $2k\gamma r \sin\Phi$ erhöhen, sondern bei anzahlmäßig hinreichend bemessenen Pratzenblechen bzw. Stützen weit darunter liegen; das ist aus den Gleichungen (27) ohne Schwierigkeit zu ersehen.

(Eingegangen am 7. Mai 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Math. *F.-J. Mainzer*, Oberhausen-Sterkrade, Borbeckerstr. 35

Experimentelle Bestimmung der Wölbfläche einer Vollkreismembran unter hydrostatischem Druck

Von K.-E. Meier-Dörnberg

1. Einleitung. Auf Anregung von Herrn Professor *Karas* habe ich zur Ergänzung seiner kürzlich veröffentlichten Arbeit[1] „Die Kreis- und Kreisringmembranen unter hydrostatischem Druck, 1. Mitteilung: Homogener Spannungszustand" bei einer Vollkreismembran die durch hydrostatischen Druck erzeugte Wölbfläche ausgemessen. Die Meßergebnisse sollen hier den Berechnungsergebnissen der zitierten Arbeit gegenübergestellt werden. Außerdem soll durch den Versuch gezeigt werden, daß die der Berechnung zugrunde liegenden spezialisierenden und vereinfachenden Voraussetzungen (unendlich kleine Auslenkung, Biegeschlaffheit und Undehnbarkeit der Membran), die das gesamte Problem einer geschlossenen mathematischen Lösung zugänglich machen, sowie homogener Spannungszustand, durchaus mit guter Annäherung in der praktischen Ausführung einzuhalten sind.

Die Versuchsdurchführung geschah in enger Anlehnung an die zitierte Arbeit. Angabe von Gleichungs- bzw. Tabellennummern beziehen sich auf eben diese.

2. Versuchsanordnung. Eine Versuchsanordnung mit waagerecht angeordneter Membran mit Gewichtsspannung über Rollen und Sandschüttung hat sich aus verschiedenen Gründen als unzweckmäßig erwiesen. Für die Versuchsdurchführung wurde daher die in Abb. 1 skizzierte Anordnung gewählt. Hierbei wurde durch einen aufpumpbaren Fahrradschlauch, der von einem Ringkasten und der Membran umschlossen ist, die Membran gespannt. Die auftretenden Reibungskräfte lassen sich durch wiederholtes Über- und Entlasten weitgehend homogenisieren, so daß ihr Störeinfluß auf den Spannungszustand als gering zu betrachten ist. Diese Anordnung hat neben der einfachen Spannungsregulierung den Vorteil, daß der Membranrand gegen das Gehäuse abgedichtet ist, so daß die Auswölbung der Membran leicht durch Flüssigkeitsdruck erzeugt werden kann.

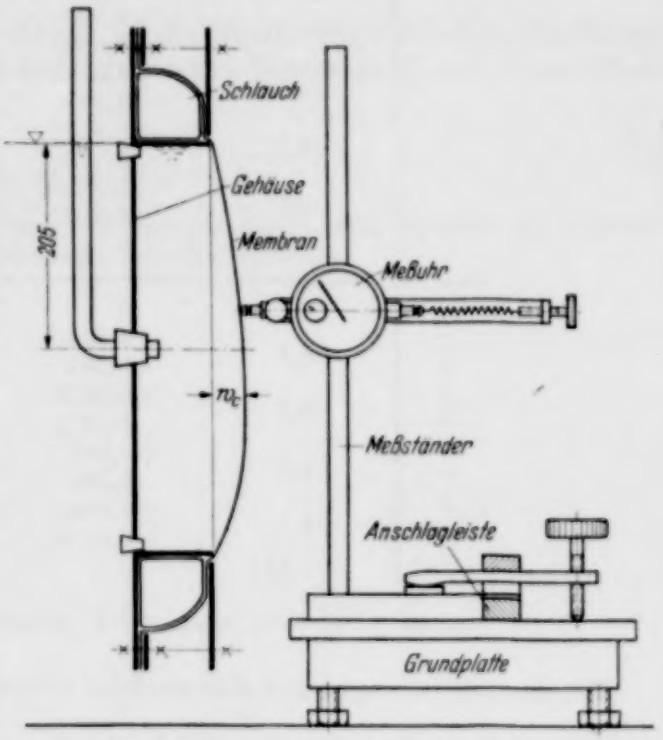


Abb. 1. Schemaskizze der Versuchsanordnung.

Das Meßsystem besteht aus einer Anreißplatte als Grundplatte, auf der ein Parallelmeßständer waagerecht an einer mit Maßeinteilung versehenen Anschlagleiste verschoben werden kann. Der Meßständer trägt an seiner lotrecht verschieblichen Muffe eine Meßuhr mit einer Meßgenauigkeit bis zu 0,01 mm, deren federbelasteter Meßstift zur Einregelung eines beliebig kleinen Meßdruckes durch eine einstellbare Gegenfederung gehalten wird.

Meßfehler bis zu $\pm$ 0,1 mm sind wegen der gegebenen Bearbeitungsungenauigkeit, der unvollkommenen Formbeständigkeit und Empfindlichkeit der Anordnung zu erwarten.

Die Auswahl des geeigneten Membranwerkstoffes wurde durch Vorversuche hinsichtlich Festigkeit, Fließverhalten und Elastizität aus einer Reihe von Gummi- und Kunststoff-Folien getroffen. Gewählt wurde die von Kalle u. Co. hergestellte „Hostaphan"-Folie von 0,05 mm Dicke mit einer Zerreißfestigkeit von mehr als 5 kp/cm (1000 kp/cm²), die bis 3,5 kp/cm (700 kp/cm²) Spannung ein nahezu ideal-elastisches Verhalten bei einem mittleren E-Modul von 160 kp/cm (32 000 kp/cm²) zeigt.

[1] *K. Karas*, Ing.-Arch. 25 (1957) S. 359.

3. Versuchsdurchführung. a) Membranspannung S und Kenngröße α. Zur Bestimmung der Membranspannung wurde vor und nach den eigentlichen Messungen die maximale Auswölbung w'_{max} der Vollmembran unter achsensymmetrischer Gleichlast, erzeugt durch Luftdruck, ausgemessen.

Tabelle 1. *Die gemessenen Werte w_{eg} und die daraus bestimmten Werte α_g und ihre Abweichung δ in % vom theoretischen Wert α (Sollwert)*

	η [—]	ξ [—]	w_{eg} [mm]	α_g [—]	δ [%]
$\alpha = 1$ (Sollwert)	—0,557	0	6,32	0,98	—2
	—0,5	+0,289	6,30	0,977	—2,3
		—0,289	6,42	0,995	—0,5
	—0,4	+0,464	6,34	0,983	—1,7
		—0,464	6,45	1,000	0
	—0,3	+0,568	6,30	0,977	—2,3
		—0,568	6,40	0,993	—0,7
	—0,2	+0,636	6,33	0,982	—1,8
		—0,636	6,34	0,983	—1,7
	—0,1	+0,681	6,33	0,982	—1,8
		—0,681	6,30	0,977	—2,3
	0	+0,707	6,30	0,977	—2,3
		—0,707	6,32	0,980	—2,0
	+0,1	+0,718	6,30	0,977	—2,3
		—0,718	6,28	0,974	—2,6
	+0,2	+0,711	6,30	0,977	—2,3
		—0,711	6,30	0,977	—2,3
	+0,3	+0,690	6,34	0,983	—1,7
		—0,690	6,30	0,977	—2,3
	+0,4	+0,650	6,40	0,993	—0,7
		—0,650	6,35	0,979	—2,1
	+0,5	+0,592	6,43	0,998	—0,2
		—0,592	6,35	0,979	—2,1
	+0,6	+0,505	6,40	0,993	—0,7
		—0,505	6,30	0,977	—2,3
	+0,7	+0,373	6,38	0,990	—1,0
		—0,373	6,23	0,966	—3,4
	+0,8	+0,053	6,25	0,969	—3,1
		—0,053	6,23	0,966	—3,4
	+0,803	0	6,23	0,966	—3,4
$\alpha = 2$ (Sollwert)	0	0	12,78	1,98	—1,0
	+0,1	+0,201	12,7	1,97	—1,5
		—0,201	12,8	1,985	—0,7
	+0,2	+0,2275	12,7	1,97	—0,15
		—0,2275	12,9	2,00	0
	+0,3	+0,201	12,73	1,974	—1,3
		—0,201	12,9	2,00	0
	+0,4	+0,0816	12,8	1,985	—0,7
		—0,0816	12,92	2,004	+0,02
	+0,414	0	12,9	2,00	0

$w_{eg\,max} = 13{,}7$ mm; $\alpha_{g\,max} = 2{,}12$ gegenüber α_{max} (berechnet) von 2,1126; $\delta = 0{,}7\%$

Mit den Gleichungen der *Karas*schen Arbeit

$$w'_{max} = \frac{1}{4}\,\frac{p'}{S}\,r_a^2\,, \tag{6a}$$

$$\alpha = 8\,\frac{w_e\,S}{\gamma\,r_a^3} \tag{23c}$$

kann daraus die Membranspannung und das Verhältnis der unter hydrostatischer Belastung gemessenen Durchsenkung w_e zu der dimensionslosen Größe α mittelbar angegeben werden.

Gemessen wurde zu Beginn der Meßreihe $w'_{max} = 12{,}8$ mm und zu Schluß der Meßreihe $w'_{max} = 13{,}0$ mm.

Nach (6a) errechnet sich die Membranspannung, wenn der Mittelwert $w'_{max} = 12{,}9$ mm und die Daten der Versuchsanordnung $r_a = 20{,}5$ cm, $p' = 20{,}5 \cdot 10^{-3}$ kp/cm² eingesetzt werden, zu

$$S = \frac{p'\,r_a^2}{4\,w'_{max}} = \frac{20{,}5^3 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 1{,}29} = 1{,}66\ \text{kp/cm}$$

und nach (23c) im Verein mit (6a) unter Beachtung, daß $p' = \gamma\, r_a$ ist,

$$\alpha = w_e \frac{8\,S}{\gamma\, r_a^3} = \frac{2\,w_e}{w'_{max}} = \frac{2}{12{,}9}\, w_e = 0{,}155\, w_e\,,$$

wenn w_e in mm eingesetzt wird.

b) Ausmessung der Wölbfläche. Die Ausmessung der durch hydrostatischen Druck erzeugten Wölbfläche geschieht in enger Anlehnung an Berechnungsbeispiel 1 der *Karas*schen Arbeit. Es werden die Auslenkungen w_e der in Tabelle 1 angegebenen Koordinaten für $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ und α_{max} ausgemessen. Die Meßwerte sind durch den Index g gekennzeichnet.

4. Beurteilung der Messungen. Die in Tabelle 1 zusammengestellten Werte α_g sind durchweg kleiner als der jeweils erwartete Sollwert. Die mittlere Abweichung δ_m liegt

für den Sollwert $\alpha = 1$ bei $\delta_m = -1{,}7\ \%$ ($\hat{=} -0{,}11$ mm bei w_e),
für den Sollwert $\alpha = 2$ bei $\delta_m = -0{,}53\%$ ($\hat{=} -0{,}07$ mm bei w_e).

Wenn auch die Abweichungen noch an bzw. in den Grenzen der eingangs genannten und später durch die Unsymmetrie der Meßfehler bestätigten Meßzuverlässigkeit liegen, bleibt ihre Tendenz jedoch offenbar und fordert eine Erklärung, die mit dem Hinweis auf zwei Stichworte gegeben sei:

1. Zeitabhängigkeit des Spannungs-Dehnungsverhaltens, ersichtlich aus den Meßwerten unter Ziff. 3a), wobei der zeitliche Mittelwert für w'_{max} in Übereinstimmung mit dem Versuchsablauf näher an dem ersten Meßwert von $w'_{max} = 12{,}8$ mm lag.

2. Dehnungsvermögen der Membran unter Beachtung des Reibungsschlusses am Membranrand, wodurch bei Belastung durch hydrostatischen Druck der Einfluß inhomogener Störspannungen kleinere als durch Berechnung gegebene Auslenkungen erwarten läßt.

Eine Ermittlung von α nach (6a) mit $w'_{max} = 12{,}8$ mm statt 12,9 mm, was nach Ziff. 4.1 und 4.2 naheliegt, hätte für $\alpha = 1$ etwa eine mittlere Abweichung $\delta_m = -0{,}8\%$ und für $\alpha = 2$, $\delta_m = +0{,}3\%$ ergeben.

Unter Berücksichtigung der durch den Versuchsaufbau und die Materialeigenschaften der Membran gegebenen Fehlerquellen darf das Versuchsergebnis als exakte Bestätigung der *Karas*schen Berechnung der Vollkreismembran gelten.

(Eingegangen am 11. Mai 1957)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Karl-Ernst Meier-Dörnberg*, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für Angewandte Mechanik und Technische Schwingungslehre

Die Berechnung geschlossener Rahmentragwerke nach dem Reduktionsverfahren

Von S. Falk

1. Einleitung, Ziel der Arbeit. Die vorliegende Arbeit behandelt als Fortsetzung meiner beiden früheren Aufsätze[1], deren Formeln und Abbildungen mit I bzw. II zitiert werden, geschlossene ebene und räumliche Rahmentragwerke. Zwei Beispiele werden ausführlich vorgerechnet. Den Schluß bildet eine kurz gefaßte vollständige Theorie des Reduktionsverfahrens für beliebige Systeme von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen (Schwingen, Knicken, elastische Bettung usw.).

2. Zwei- und mehrfache Koppelfedern. Bislang haben wir nur die einseitige Koppelfeder nach Art der Abb. 1 kennengelernt. Um auch die Matrix der beidseitigen (zweifachen) Feder nach Abb. 2 zu gewinnen, denken wir uns einen durchlaufenden Träger oder ein offenes Tragwerk an zwei beliebigen Stellen M und N durchgeschnitten (Abb. 3), rechnen, in M beginnend, mit den dort vorhandenen 2ϱ Kraft- und Deformationsgrößen als Freigrößen bis zum Punkte N und finden ähnlich wie unter II (37)

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \cdots & \mathfrak{S}_1 & \cdots & \\ * & * & \cdots & * \end{matrix} & \begin{matrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \cdots & \mathfrak{S}_2 & \cdots & \\ * & * & \cdots & * \end{matrix} & \begin{matrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \cdots \\ \bar{d}_\varrho \end{matrix} \\ \begin{matrix} * & * & \cdots & * \\ \cdots & \mathfrak{S}_3 & \cdots & \\ * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \end{matrix} & \begin{matrix} * & * & \cdots & * \\ \cdots & \mathfrak{S}_4 & \cdots & \\ * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \end{matrix} & \begin{matrix} \bar{k}_\varrho \\ \cdots \\ \bar{k}_2 \\ \bar{k}_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (d_1\ d_2 \dots d_\varrho)_M \\ \\ \\ \\ (k_\varrho\ k_{\varrho-1} \dots k_1)_M \\ \\ \\ \\ 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_\varrho \\ k_\varrho \\ \cdots \\ k_2 \\ k_1 \\ 1 \end{pmatrix}_N \tag{1}$$

oder kurz

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_1\,\mathfrak{d}_M + \mathfrak{S}_2\,\mathfrak{k}_M &= (\mathfrak{d} - \bar{\mathfrak{d}})_N \\ \mathfrak{S}_3\,\mathfrak{d}_M + \mathfrak{S}_4\,\mathfrak{k}_M &= (\mathfrak{k} - \bar{\mathfrak{k}})_N \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{k}_M &= -\mathfrak{S}_2^{-1}(\mathfrak{d} - \bar{\mathfrak{d}})_N + \mathfrak{S}_2^{-1}\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{d}_M\,, \\ (\mathfrak{k} - \bar{\mathfrak{k}})_N &= \mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_2^{-1}(\mathfrak{d} - \bar{\mathfrak{d}})_N - (\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_2^{-1}\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_3)\,\mathfrak{d}_M\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Gesamtmatrix

$$\mathfrak{C}_{MN} = \begin{pmatrix} -\mathfrak{S}_2^{-1} & \mathfrak{S}_2^{-1}\mathfrak{S}_1 \\ \mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_2^{-1} & -\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_2^{-1}\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

ist nach dem Satz von *Maxwell-Betti* nebensymmetrisch und heißt die Federmatrix der Rahmenschnitte M, N. Im wichtigen Sonderfall des einfeldrigen geraden Balkens mit konstanter Biegesteifigkeit lautet sie zum Beispiel für die beiden Paare (φ, M_y) und (w, Q_z)

$$E J_y \begin{pmatrix} -6/l^2 & -2/l & 6/l^2 & -4/l \\ 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ -6/l^2 & -4/l & 6/^2 & -2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{d} = \begin{pmatrix} w \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k} = \begin{pmatrix} M_y \\ Q_z \end{pmatrix}. \tag{5}$$

[1] *S. Falk*, Ing.-Arch. 24 (1956) S. 216; *S. Falk*, Ing.-Arch. 26 (1958) S. 61.

Sind insbesondere die Endpunkte unverschieblich, $w_M = w_N = 0$, so folgt hieraus nach Streichen der ersten und dritten Spalte, wenn wir noch die Zeiger M und N durch 0 und 1 ersetzen,

$$\begin{pmatrix} -M_0 \\ M_1 - \tilde{M}_1 \end{pmatrix} = \frac{EJ}{l} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 - \tilde{\varphi}_1 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \cdot \tag{6}$$

Wenn die Belastung fehlt, entnehmen wir daraus die Gleichung der geraden Momentenlinie (Abb. 4)

$$M(x) = M_0 + (M_1 - M_0) \cdot \frac{x}{l} = \frac{EJ}{l} \left[(4\varphi_0 + 2\varphi_1) - (6\varphi_0 + 6\varphi_1) \cdot \frac{x}{l} \right]. \tag{7}$$

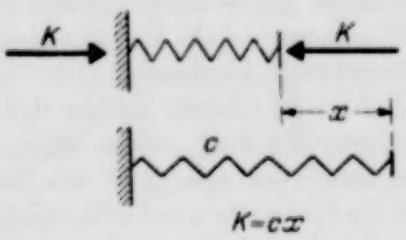


Abb. 1. Einseitige Feder.

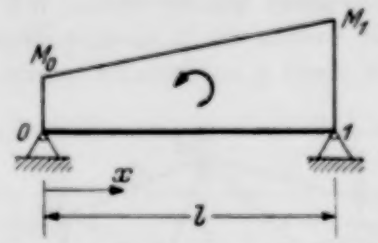


Abb. 4. Linearer Momentenverlauf über einem unbelasteten geraden Balken.

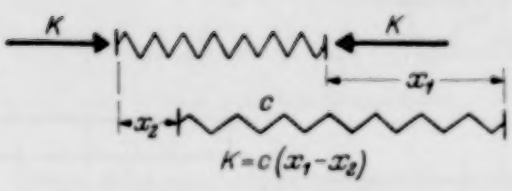


Abb. 2. Beidseitige Feder.

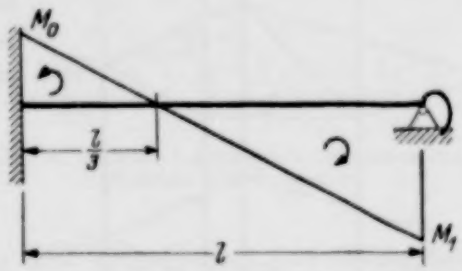


Abb. 5. Drittelpunkt bei fester Einspannung und fehlender Belastung.

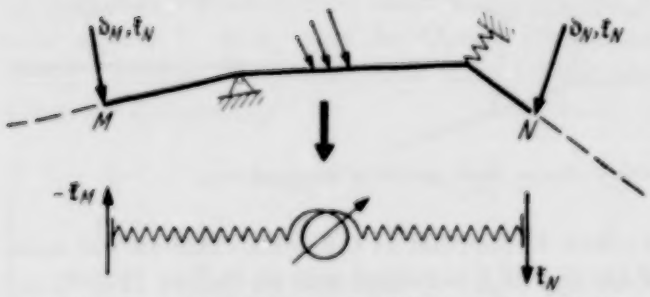


Abb. 3. Ersatz eines Rahmenteiles M N durch eine beidseitige (belastete) Koppelfeder.

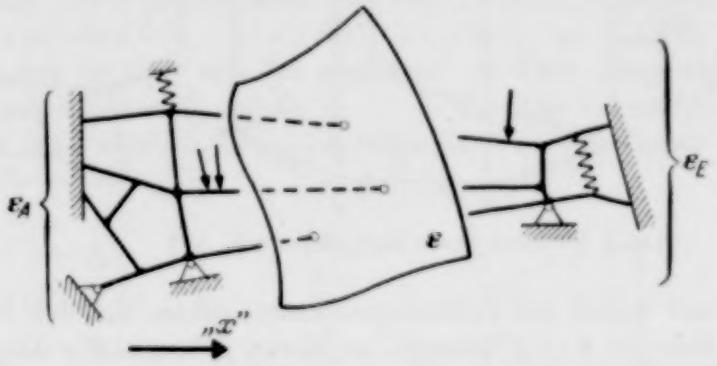


Abb. 6. Räumliches Tragwerk mit Schnittfläche; schematisch.

Das Biegemoment $M(x)$ verschwindet im Punkt

$$x^* = \frac{2\varphi_0 + \varphi_1}{3\varphi_0 + 3\varphi_1} \cdot l. \tag{8}$$

Für $\varphi_0 = 0$ folgt daraus $x^* = 1/3$ (Drittelpunkt bei fester Einspannung, Abb. 5) und weiter aus (7)

$$M(x) = \frac{2EJ}{l} \cdot \left(1 - 3\frac{x}{l}\right)\varphi_1 . \tag{9}$$

Wir haben in (3) gleich den Vektor $-\mathfrak{f}_M$ (nicht $+\mathfrak{f}_M$) auf die linke Seite gesetzt; das aus $-\mathfrak{f}_M$, $\mathfrak{f}_N$ und $\tilde{\mathfrak{f}}_N$ bestehende Kräftesystem ist dann im Gleichgewicht. Oder anders ausgedrückt: die Gleichung (3) gibt an, wie eine im Bereich $M\,N$ gegebene Belastung bei vorgeschriebenen Deformationen $\mathfrak{d}_M$ und $\mathfrak{d}_N$ auf die Umgebung „abgesetzt", d. h. in welchem Verhältnis sie verteilt wird. Das zugehörige Symbol zeigt Abb. 3 unten.

Ganz allgemein lassen sich nun durch p Schnitte insgesamt $\pi = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_p$ Kraftgrößen des Tragwerkes bloßlegen, die mit ihren konjugierten Deformationsgrößen über eine π-reihige quadratische Federmatrix zusammenhängen (p-fache Koppelfeder); die Reziproke dazu heißt eine p-fache Einflußmatrix.

3. Der Begriff der gemeinsamen Reduktion. Eine Schnittfläche möge ein beliebiges Rahmentragwerk in zwei getrennte Teile zerlegen und dabei in s Schnittpunkten treffen (Abb. 6). Ähnlich

wie früher II. Ziff. 2 können wir jetzt die Gesamtheit der zweimal

$$r = \sum_{1}^{s} \varrho_\nu \qquad (1 \leqq \varrho \leqq 6) \tag{10}$$

Kraft- und Deformationsgrößen in der Schnittfläche ε reduzieren, und auch hier läuft die Aufgabe darauf hinaus, die zunächst unbekannten Kraft- und Deformationsgrößen an der „Anfangsfläche" ε_A zu finden. Sind diese bekannt, so läßt sich das Tragwerk in einem einzigen Rechnungsgang bis zur „Endfläche" ε_E durchrechnen.

4. Die geordnete Strangschar. Wir betrachten jetzt s parallele gleich lange gerade Durchlaufträger — wir wollen sie in diesem Zusammenhang „Stränge" nennen — als Kanten eines geraden Prismas über einer Grundfläche ε_0 und legen n dazu parallele Schnitte hindurch (Abb. 7). Koppelfedern, die in Abb. 7 der Einfachheit halber durch gerade Verbindungslinien dargestellt sind, sollen allein in diesen Schnittebenen liegen, und zwar sprechen wir von „Nachbarkopplung", wenn höchstens je zwei benachbarte Ecken durch Koppelfedern miteinander verbunden sind (wie in der Ebene ε_1, Abb. 7), sonst von „durchgehender" Kopplung (so in den Ebenen ε_2 und ε_n). Nun fassen wir die Kraft- und Deformationsgrößen sämtlicher s Stränge zu einem einzigen Vektor $\mathfrak{x}$ zusammen

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots \mathfrak{d}_s, \quad \mathfrak{k}_s, \ldots \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_1, \quad 1) \tag{11}$$

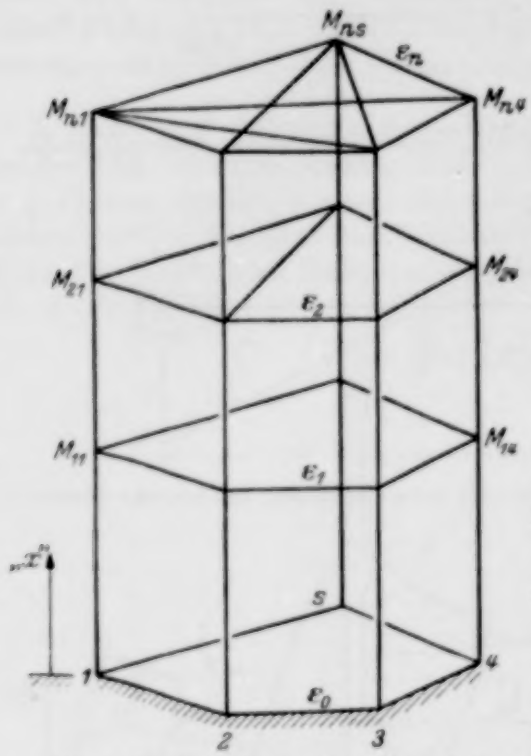


Abb. 7. Geordnete Strangschar; schematisch.

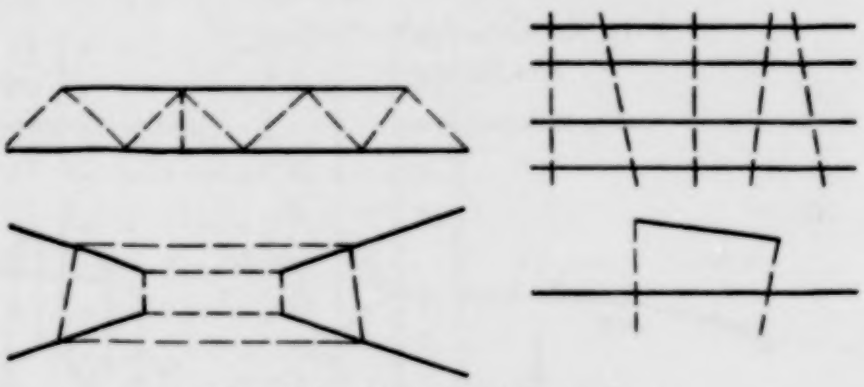


Abb. 8. Einige ebene geordnete Strangscharen.

und bauen die zugehörigen Leitmatrizen aus den Matrizen II (10) bis II (13) auf. Haben wir zum Beispiel $s = 2$ Stränge, an deren jedem allein das Paar (φ, M_y) beteiligt sei, so liefert II (18) im Falle unverschieblicher Knoten ($w_i = 0$)

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & l_a/2\,EJ_a & \bar{\bar{\varphi}}_a & 0 & 0 \\ 0 & -2 & l_b/2\,EJ_b & 0 & \bar{\bar{\varphi}}_b & 0 & 0 \\ 0 & 6\,EJ_b/l_b & -2 & 0 & \approx M_b & & \\ 6\,EJ_a/l_a & 0 & 0 & -2 & \approx M_a & \mathfrak{S}_{ab} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ M_b \\ M_a \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Von den Komponenten des Vektors $\mathfrak{x}$ (11) verschwinden an der Anfangsfläche r Komponenten, die übrigen r Freigrößen werden durch die r Randbedingungen an der Endfläche festgelegt, und mit dem nun bekannten Anfangsvektor $\mathfrak{x}_0$ wird die ganze Rechnung wiederholt. Diese Rechnung verläuft somit auch hier nach dem Schema II (34) und wird im Prinzip nicht gestört, wenn wir das Prisma der Abb. 7 noch auf folgende Weise verallgemeinern:

1. Auf jedem Strang werden noch beliebig viele Feldgrenzen eingefügt (Anfederungen, Ablenkwinkel, Zwischenbedingungen).

2. Die Punkte $M_{\mu\nu}$ werden auf ihren Strängen verschoben, doch nur so, daß ihre Reihenfolge ungeändert bleibt; allenfalls dürfen einige Punkte $M_{\mu\nu}$ zusammenfallen.

3. Die Stränge brauchen weder geradlinig noch parallel zu sein, dürfen sich nur nicht schneiden.

Wir gewinnen hiernach eine große Mannigfaltigkeit von räumlichen Netzwerken, die wir alle als geordnete Strangscharen bezeichnen wollen. Einige einfache ebene Netze zeigt die Abb. 8, wo die

Stränge durchgezeichnet sind. Zwar ist die Strangzahl s keine fest definierte Größe, doch fällt bei den üblichen Bauwerken der Praxis die Auswahl der kleinstmöglichen Zahlen s bzw. r nicht schwer.

5. Die Ausnahme-Strangschar. Nicht jedes Tragwerk ist einer geordneten Strangschar topologisch äquivalent. Es kann durchaus vorkommen, daß sich einige oder alle Stränge schneiden. An solchen Schnittpunkten — in der Abb. 9 z. B. den Punkten A, B, C, D, E — sind im allgemeinen Zwischenbedingungen zu erfüllen, so etwa in A: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4$, $\sum M_y = 0$. Daß sich jedes überhaupt denkbare Rahmentragwerk auf eine Strangschar zurückführen läßt, liegt auf der Hand: man braucht ja nur jedes einzelne Feld zum Strang zu erklären.

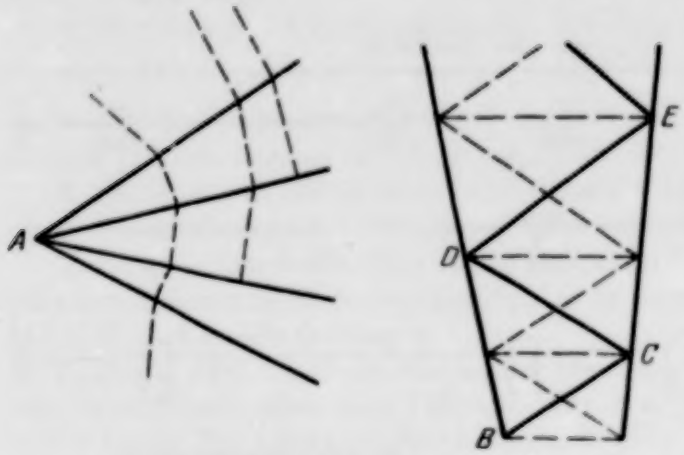


Abb. 9. Zwei Ausnahme-Strangscharen.

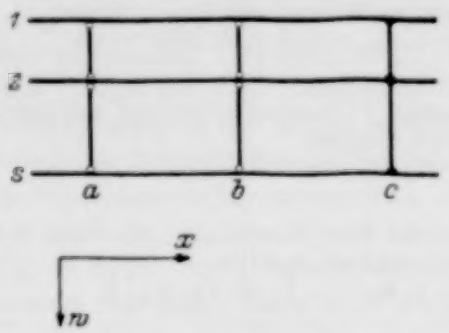


Abb. 10. Längsstarres Tragwerk mit gemeinsamen Knotenverschiebungen w.

6. Tragwerke mit einheitlichen Zwischenbedingungen. Bei Tragwerken mit einheitlichen Zwischenbedingungen kann es oft von Vorteil sein, den Vektor $\underset{\sim}{\chi}$ (11) anders einzuführen. Das praktisch wichtigste Beispiel zeigt die Abb. 10: infolge der Längsstarrheit der senkrechten Zwischenstützen sind die Durchbiegungen w an der Stelle a (ebenso in b, c usw.) einander gleich; zweckmäßig ist daher die Einführung eines konjugierten Paares (w, Q_{ges}) mit der gemeinsamen Durchbiegung $w = w_1 = \cdots = w_s$ und der Querkraftsumme am Knoten $Q_{ges} = Q_1 + \cdots + Q_s$. Für ein rechteckiges ebenes Tragwerk nach Abb. 10 mit zwei (und ähnlich mit s) Strängen lautet dann die zugehörige Leitmatrix

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccc}
1 & -\alpha_a & -\alpha_b & -\beta_b & -\beta_a & 1/6\,m & \sum_1^s \tilde{w}\,\mu/m & 0 & 0 & 0 \\
3/l_a & -2 & 0 & 0 & (l/2\,E\,J)_a & 0 & \tilde{\varphi}_a & -3/l_a & 0 & 0 \\
3/l_b & 0 & -2 & (l/2\,E\,J)_b & 0 & 0 & \tilde{\varphi}_b & -3/l_b & 0 & 0 \\
-6\,(E\,J/l^2)_b & 0 & 6\,(E\,J/l)_b & -2 & 0 & 0 & \tilde{\tilde{M}}_b & 6\,(E\,J/l^2)_b & * & * \\
-6\,(E\,J/l^2)_a & 6\,(E\,J/l)_a & 0 & 0 & -2 & 0 & \tilde{\tilde{M}}_a & 6\,(E\,J/l^2)_a & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{Q}_{ges} & -c & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \tag{13}$$

$$(w \quad \varphi_a \quad \varphi_b \quad M_b \quad M_a \quad Q_{ges} \quad 1) = \underset{\sim}{\chi}\,.$$

Dabei wurde zur Abkürzung gesetzt

$$\mu = E\,J/l^3\,, \qquad m = \sum_1^s \mu\,, \qquad \alpha = E\,J/m\,l^2\,, \qquad \beta = 1/2\,l\,m\,. \tag{14}$$

Der mittlere Teil des Kerns der Matrix (13) enthält die Kenngrößen der Paare (φ, M) und wird umrahmt von den (zum Teil durch (14) definierten) Kenngrößen des allen s Strängen gemeinsamen Paares (w, Q_{ges}). Der Ausdruck $\sum (\tilde{w}\,\mu)/m$ stellt gewissermaßen das gewogene Mittel der durch die Belastungen hervorgerufenen Durchbiegungen dar.

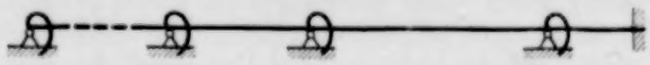
7. Einige spezielle Tragwerke der Baustatik. Wir stellen jetzt einige in der Praxis immer wiederkehrende Typen von Tragwerken zusammen und geben ihre kennzeichnenden Eigenschaften an. Es bedeuten:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Anzahl der Stränge} & s\,, \\ \text{Art der Kopplung} \left\{\begin{array}{ll} \text{keine} & k_0\,, \\ \text{Nachbarkopplung} & k_n\,, \\ \text{durchgehende Kopplung} & k_d\,. \end{array}\right. & \\ \text{Anzahl der beteiligten Paare je Strang} & \varrho_\nu \\ \text{Art der Leitmatrix (Hinweis auf II ...)} & (\text{II}\ldots)\,, \\ \text{Ordnung } r \text{ des zu lösenden Gleichungssystems} & r = \sum_1^s \varrho_\nu\,. \end{array}\right\} \tag{15}$$

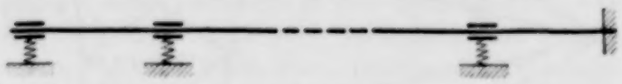
Damit ist Tab. 1 wohl ohne weitere Erläuterungen verständlich.

Tabelle 1. *Einige spezielle Tragwerke der Baustatik*

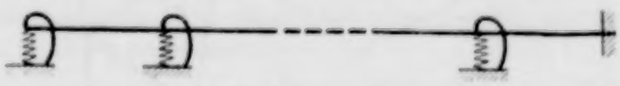
1. Durchlaufträger auf festen Stützen.
$s = 1$, k_0, $\varrho = 1$, (II. 18), $r = 1$.



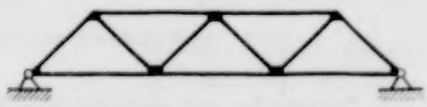
2. Gerader Durchlaufträger auf unverdrehbaren Stützen.
$s = 1$, k_0, $\varrho = 1$, (...), $r = 1$.



3. Gerader Durchlaufträger, elastisch dreh- und senkbar gestützt.
$s = 1$, k_0, $\varrho = 2$, (I, 9), $r = 2$.

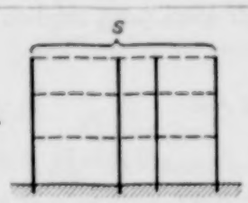


4. Fachwerkbrücke, Knoten eckensteif. $s = 2$, k_n.
Falls längsstarr (Knoten unverschieblich):
$\varrho = 1$, (II. 18), $r = 2$.
Falls Biegung mit Längsdehnung: $\varrho = 3$, (II. 14), $r = 6$.

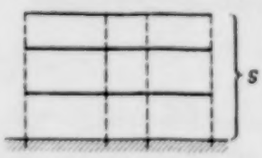


5. Stockwerkrahmen, Knoten unverschieblich (längsstarr).
s, k_n, $\varrho = 1$, (II. 18), $r = s$.

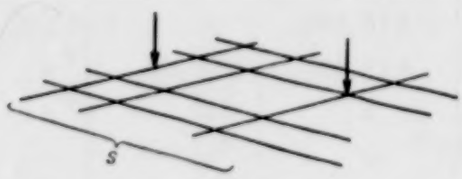
6. Stockwerkrahmen, Knoten verschieblich (längsstarr). s, k_n.
Entweder $\varrho = 1$, (III. 13), $r = s$.



oder $\varrho = 2$, (....),
$r = 2\,s$.



7. Trägerroste (Kreuzwerke).
Biegen allein ($GI = 0$): s, k_d, $\varrho = 2$, (II. 9), $r = 2\,s$.
Biegen und Drillen: s, k_n, $\varrho = 3$, (....), $r = 3\,s$.



8. Die praktische Durchführung des Verfahrens. Wir stellen jetzt ein allgemeines Programm auf, nach welchem sich jedes ebene oder räumliche Rahmentragwerk (auch Fachwerk) berechnen läßt.

1. Die Charakteristik des Tragwerkes wird nach (15) festgelegt. Man entwirft eine Skizze der einzelnen Stränge und stellt die Hauptteile der Leitmatrizen nach II (10) usw. zusammen. Falls der Rahmen abgewinkelt ist, müssen diese Hauptteile noch mit den Transformationsmatrizen $\mathfrak{T}$ II (35) multipliziert werden.

2. Kommen im Strangschema Koppelfedern vor, so entnimmt man deren Federmatrizen einer Tabelle oder berechnet sie nach dem in II. Ziff. **6** bzw. III. Ziff. **2** geschilderten Verfahren. Diese stets nebensymmetrischen Federmatrizen werden unten rechts in die Leitmatrix $\mathfrak{L}$ II (15) eingetragen.

3. Alle Werte liegen jetzt formelmäßig vor, z. B. $6\,E\,J/l^2$, $2\,l\cos 40°$ und dergleichen. Diese Werte werden dimensionslos gemacht mit Hilfe zweier zweckmäßig zu wählenden Vergleichsgrößen

P^* (Kraft) und l^* (Länge), indem man sämtliche vorkommenden Größen als Vielfaches von P^*, l^*, $P^* l^*$, P^*/l^* usw. darstellt, die Buchstaben P^* und l^* aber während der Rechnung fortläßt (oder in etwas nachlässiger, aber gebräuchlicher Redeweise: indem man sie gleich Eins setzt). Bei homogenen Tragwerken (und wohl auch sonst) empfehlen sich $l^* = l$ und $P^* = 6\,E\,J/l^2$ bzw. $P^* = 2\,E\,J/l^2$.

4. Nun multipliziert man die $r + 1$ Spalten unabhängig voneinander an sämtlichen Leitmatrizen von oben nach unten vorbei. Nach jeder Matrizenmultiplikation ist die Summenprobe zu machen, bei größeren Matrizen schaltet man Zwischenproben ein. Unten rechts neben der letzten Leitmatrix $\mathfrak{L}_n$ findet man dann die r Nullgrößen vor. (Die übrigen r Größen g_{ni} brauchen oft nicht berechnet zu werden.)

5. Man löst das Gleichungssystem II (33)

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{r} = \mathfrak{b} = 0 \tag{16}$$

nach dem *Gauß*schen Algorithmus oder durch Iteration und findet mit $\mathfrak{a}$ zugleich den Anfangsvektor $\mathfrak{x}_0$. Die Lösung ist aus mechanischen Gründen stets vorhanden und eindeutig.

6. Mit dem nun zahlenmäßig vorliegenden Anfangsvektor $\mathfrak{x}_0$ wird die Rechnung in einer einzigen Spalte, der „Endspalte" wiederholt. Die r Bedingungen rechts müssen von selbst erfüllt sein.

7. Jetzt sind auch alle etwa abgeschnittenen Zweige (ein -oder mehrfache Koppelfedern) nach dem gleichen Schmea in einer einzigen Spalte zu berechnen, da deren Anfangswerte nach II. Ziff. 6 bzw. III. Ziff. 2 ebenfalls festliegen.

8. Damit sind die Werte der an der Deformation beteiligten Kraft- und Deformationsgrößen für alle Feldgrenzen, also nach I (2) usw. für den ganzen Rahmen gegeben. Auch etwa unterdrückte Paare lassen sich leicht wiedergewinnen II (20).

9. Zum Schluß prüft man nach, ob die gegebene Belastung und die berechneten Reaktionen zusammen im Gleichgewicht sind.

Soll dasselbe Tragwerk für verschiedene Belastungen durchgerechnet werden, so sind auszuwechseln: die Lastspalten in den Leitmatrizen, die inhomogene Spalte im Schema II (34), der Vektor $\mathfrak{r}$ in (16) und die Endspalte. Es macht auch keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, einige Kennwerte $E\,J$, l usw. als frei verfügbare Parameter mitzunehmen, auch lassen sich nachträglich neue Feldgrenzen einführen I (13).

Ein Umstand ist indessen an dieser Stelle erwähnenswert: Aus mechanischen Gründen liegen die Werte der Endspalte bei vernünftiger Wahl von P^* und l^* etwa zwischen 0,1 und 10, auf alle Fälle aber in derselben Größenordnung. Nicht so die Werte der homogenen Spalten: diese schwellen in der Regel mit wachsender Felderzahl stark an, was sich oft schon beim vierten, fünften Feld unliebsam bemerkbar macht. Mit anderen Worten: die in der Größenordnung gleichbleibenden Endwerte sind die so gefürchteten „kleinen Differenzen großer Zahlen" und das um so mehr, je höher die Nummer des Feldes ist. Bei der Wiederholung mit dem Vektor $\mathfrak{x}_0$ wird daher im allgemeinen eine Gleichung

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{r} = \mathfrak{f} \neq 0 \tag{17}$$

mit einem Fehlervektor $\mathfrak{f}$ entstehen. Jetzt lösen wir das Gleichungssystem

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}^{(1)} + \mathfrak{f} = 0 \tag{18}$$

und wiederholen die Rechnung mit dem neuen Vektor $\mathfrak{x}_0^{(1)}$, diesmal aber mit der letzten Ziffer 0 statt 1, wodurch die gegebene Belastung automatisch ausgeschaltet wird, und bekommen als Summe zweier Endspalten das Ergebnis

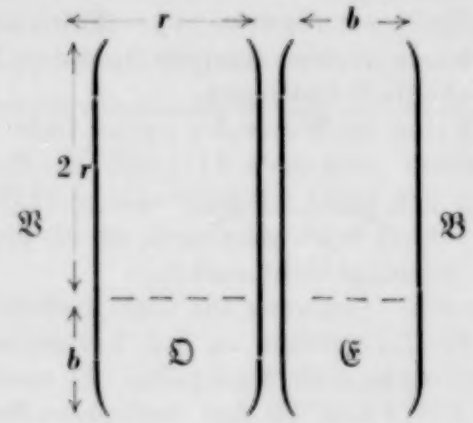
$$\mathfrak{x}_i^1 = \mathfrak{x}_i + \mathfrak{x}_i^{(1)}, \tag{19}$$

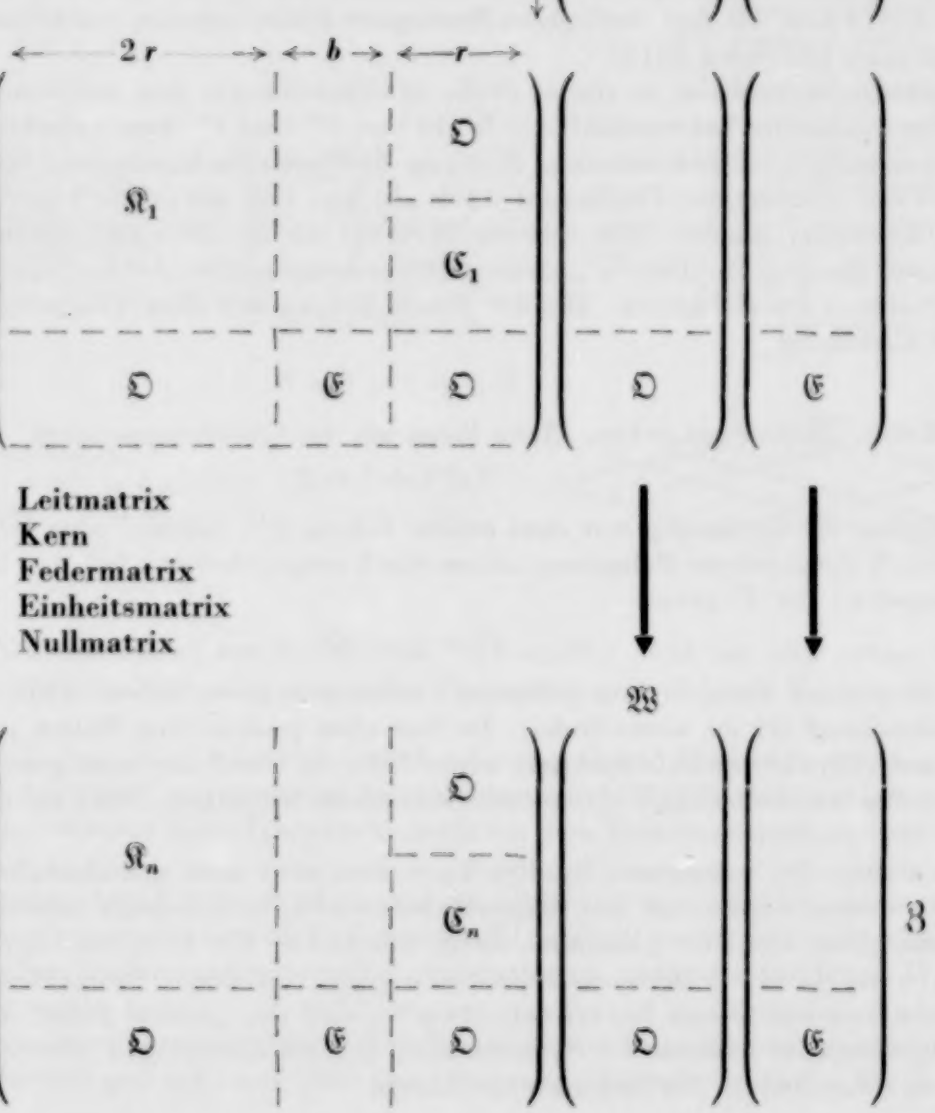
wobei wir eine gewisse Anzahl neuer geltender Stellen gewonnen haben. Falls notwendig, ist dieser Vorgang hinreichend oft zu wiederholen. In fast allen praktischen Fällen jedoch genügt es, den Vektor $\mathfrak{a}^{(1)}$ aus (18) zu ermitteln und mit seiner Hilfe an Hand der homogenen Spalten die Anzahl der geltenden Stellen abzuschätzen, was meist mit einem flüchtigen Blick auf die Rechnung erledigt ist.

Das Anwachsen der homogenen Spalten kann man aber auch grundsätzlich verhindern, indem man die Träger zerschneidet und mit Koppelfedern rechnet; allerdings müssen dann mehrere Gleichungssysteme gelöst werden. Aber auch durch geschickte Wahl des Anfangsvektors läßt sich das Anschwellen weitgehend verhindern, indem man nicht mit den r Freigrößen selbst, sondern geeigneten Linearkombinationen losrechnet, etwa so, daß die „rechte Seite" $\mathfrak{r}$ in (16) klein bleibt oder die Hauptdiagonalelemente der Systemmatrix $\mathfrak{A}$ stark überwiegen (zum Zwecke der Iteration); doch sind das Einzelheiten, die hier zu weit führen.

Sind mehrere oder alle Leitmatrizen einander völlig oder doch annähernd gleich, so schreibt man sie ein einziges Mal auf ein bewegliches Blatt, das an den Kolonnen des Schemas II (34) von oben nach unten vorbeigezogen wird. Bei großer Strangzahl s werden die Matrizen ziemlich umfangreich — sie enthalten dann relativ immer mehr Nullen — und daher leicht unübersichtlich; man wird in solchen Fällen, namentlich bei nur schwacher Kopplung (insbesonder Nachbarkopplung) die Stränge einzeln bzw. gruppenweise nebeneinander herführen und die unterdrückte Kopplung nach jeder Matrizenmultiplikation gesondert nachholen.

9. Die Programmierung für digitale Rechenautomaten. Das Reduktionsverfahren verlangt in der hier entwickelten Form lediglich zwei Operationen: das Multiplizieren und das Umkehren von Matrizen, beides aber gehört zum Grundprogramm auch der kleinsten Ziffernmaschine. Will man die in II (22) definierte verschränkte Multiplikation umgehen — obwohl auch deren Programmierung keine besonderen Umstände erfordert —, so rechnet man nach II (23). Um den allgemeinen Rechnungsgang auf einem Automaten zu zeigen, entwickeln wir jetzt das Programm für eine geordnete Strangschar (Durchlaufträger, Stockwerkrahmen, Trägerrost und dergleichen), und zwar werde das Tragwerk gleich für b verschiedene Lastfälle berechnet. Das zugehörige Matrizenschema sieht so aus:





Und die Anweisung für den Rechenautomaten lautet:

1. Eingabe: n Matrizen $\mathfrak{L}_i$ (Leitmatrizen),
   Matrix $\mathfrak{V}$ (homogene Spalten),
   Matrix $\mathfrak{B}$ (b Belastungen).
2. Berechne und speichere das Produkt $\mathfrak{P} = \mathfrak{L}_n \mathfrak{L}_{n-1} \cdots \mathfrak{L}_1$.
3. Berechne $\mathfrak{W} = \mathfrak{P}\,\mathfrak{V}$.
4. Greife aus $\mathfrak{W}$ r bestimmte Zeilen heraus und fasse sie zur Matrix $\mathfrak{A}$ zusammen.
5. Bilde und speichere $\mathfrak{A}^{-1}$.
6. Berechne das Produkt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{P}\,\mathfrak{B}$.
7. Greife aus $\mathfrak{Z}$ r bestimmte Zeilen heraus (die gleichen wie unter 4) und fasse sie zur Matrix $\mathfrak{M}$ zusammen.
8. Berechne $\mathfrak{D} = -\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{M}$.
9. Berechne $\mathfrak{H} = \mathfrak{B} + \mathfrak{V}\,\mathfrak{D}$.
10. Berechne und drucke aus $\begin{cases} \mathfrak{L}_1\,\mathfrak{H}, \\ \mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{H}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{L}_n\,(\mathfrak{L}_{n-1}\cdots\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{H}). \end{cases}$

Die unter 10. ausgedruckten Matrizen enthalten die Kraft- und Deformationsgrößen an sämtlichen Feldgrenzen für die b vorgeschriebenen Lastfälle in den Dimensionen P^*, l^*, P^*l^* usw.

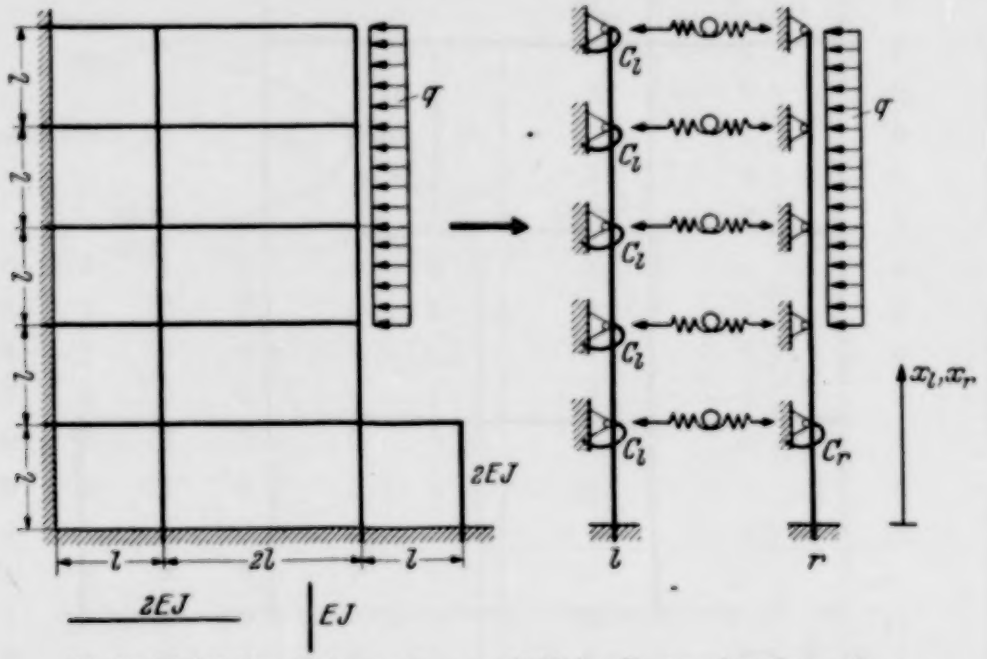


Abb. 11. Fünfstöckiger Rahmen mit unverschieblichen Knoten, dazu Strangschema.

10. Beispiele. Wir führen nun zwei Beispiele vor und richten uns dabei nach dem Programm aus Ziff. 8.

a) Erstes Beispiel. Für den fünfstöckigen Rahmen von Abb. 11 ist der Biegemomentenverlauf infolge der angegebenen Windbelastung zu berechnen. Die Knoten sind unverschieblich.

1) $s=2$, k_n, $\varrho=1$, II (18), $r=2$. Strangschema Abb. 11 rechts. Sämtliche Koppelfedern sind unbelastet.

2) Es ist $C_l = 4\cdot 2EJ/l = 8EJ/l$ nach Tabelle II, 2; die Feder C_r des zweifeldrigen Rahmenwinkels unten rechts ergibt eine kurze Rechnung mit der Matrix II (18) zu $C_r = 7EJ/l$. Die Matrix der Koppelfeder ist nach (6)

$$\begin{pmatrix} -M_l \\ M_r \end{pmatrix} = \frac{2EJ}{2l} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_r \\ \varphi_l \end{pmatrix}.$$

3) Wir wählen $P^* = 2EJ/l^2$, $l^* = l$, $q = 12\,P^*/l^*$, d. h. $EJ = 1/2$, $l = 1$, $q = 12$.

4) Zahlenschema 1. Die Leitmatrix finden wir unter (12) vor; die Federmatrix $\mathfrak{C}_{ab}$ unten rechts in $\mathfrak{L}$ ist hier

$$\begin{pmatrix} 0 & -C_r \text{ (bzw. } 0) \\ -C_l & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5{,}5 \text{ (bzw. } -2) \\ -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

5) Die beiden Randbedingungen rechts (d. h. hier oben) lauten

$$\left.\begin{aligned} M_{5r} &= -18{,}600\, M_{0l} - 11{,}7145\, M_{0r} - 0{,}155 = 0 \\ M_{5l} &= -82{,}394\, M_{0l} - 24{,}795\; M_{0r} - 0{,}163 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} M_{0l} = \;\; 0{,}00383667\,, \\ M_{0r} = -0{,}0193232\,. \end{cases}$$

6) Siehe Zahlenschema 1. In den homogenen Spalten ist mehrmals nach abgeschlossener Matrizenmultiplikation der Faktor 10 herausgezogen, um ein unnötiges Anschwellen der Zahlen zu vermeiden; auf die eingerahmten Endgleichungen ist dieser Rechenkniff ohne Einfluß. Die Werte der Endspalte sind einer achtstelligen Rechnung entnommen und aufgerundet.

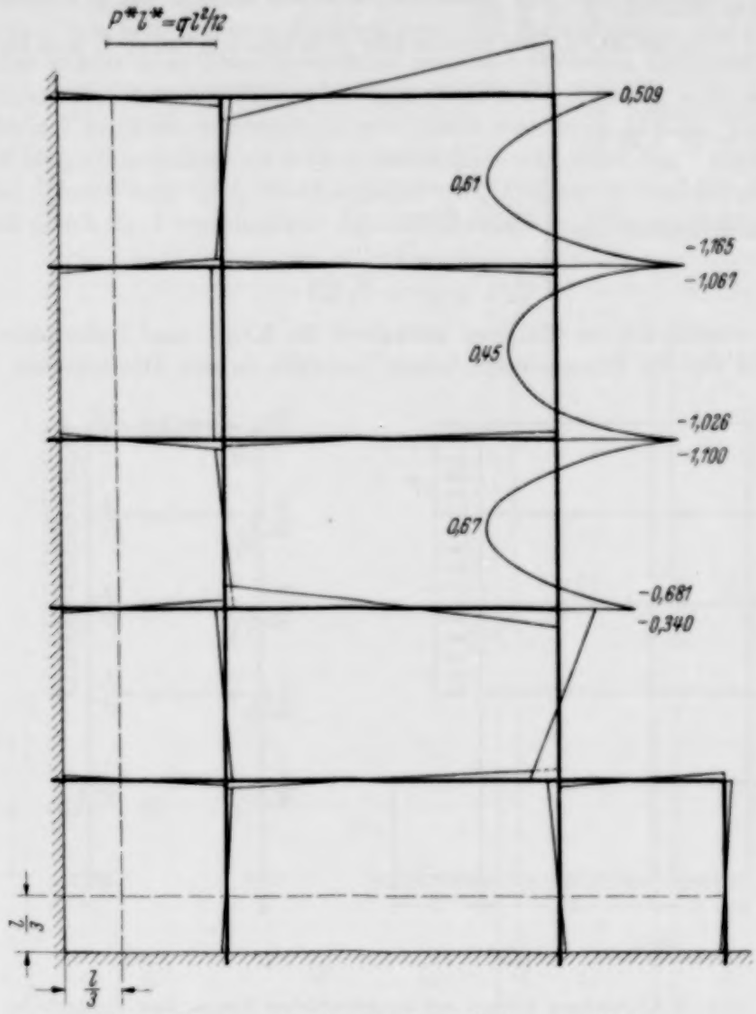


Abb. 12. Momentenverlauf für den Stockwerkrahmen von Abb. 11.

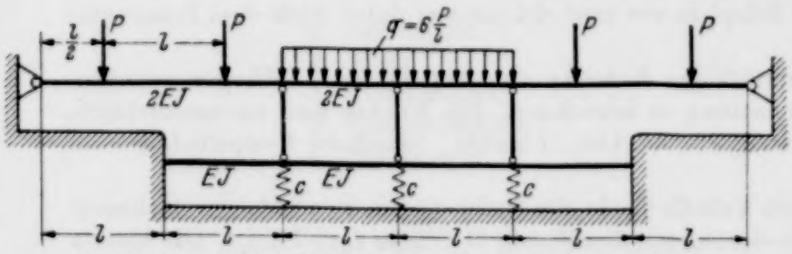


Abb. 13. Symmetrisches Tragwerk mit gemeinsamen Knotenverschiebungen w.

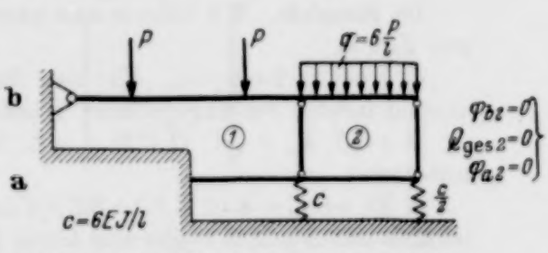


Abb. 14. Linke Hälfte des Tragwerkes von Abb. 13.

7) Für alle eingespannten Rahmenteile gilt infolge fehlender Belastung die Gleichung (9): Drittelpunkte in Abb. 12. Für die waagerechten Mittelträger gibt (6) den Momentenverlauf.

8) Momentenverlauf Abb. 12: über den drei belasteten Feldern parabolisch, sonst linear, Dimensionen: M in $P^*l^* = 2\,E\,J/l$, $q = 12\,P^*/l^* = 24\,E\,J/l$, also erscheint M in $q\,l^2/12$.

9) Ableiten der Momentenlinie gibt den Querkraftverlauf, womit alle 24 Reaktionen bekannt sind. Wie man sich leicht überzeugt, ist das gesamte Kräftesystem im Gleichgewicht.

b) Zweites Beispiel. Für das symmetrische und symmetrisch belastete Tragwerk von Abb. 13 sind Querkraft- und Momentenverlauf zu ermitteln. Infolge der starren, gelenkig angeschlossenen

senkrechten Zwischenstützen sind die Durchbiegungen beider Träger an den Feldgrenzen einander gleich.

1) $s = 2$, k_0, $\varrho_a = \varrho_b = 1$, dazu das Paar (w, Q_{ges}), (13), $r = 3$.

2) Koppelfedern sind nicht vorhanden.

3) Wir wählen $l^* = l$, $P^* = 6\,EJ/l^2$, ferner $P = P^*$ und haben damit $P = 1$, $l = 1$, $EJ = 1/6$, $c = 1$, $q = 6$.

Die in die Leitmatrix (13) einzusetzenden Werte sind nach (14) und den Tabellen I. 1 bzw. II. 1,3:

Feld 1:

$$\left.\begin{aligned}\mu_a &= EJ/l^3 = 1/6\\ \mu_b &= 2\,EJ/(2\,l)^3 = 1/24\end{aligned}\right\} m = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24}\begin{cases}\alpha_a = EJ/m\,l^2 = 0{,}8; & \beta_a = 1/2\,m\,l = 2{,}4,\\ \alpha_b = 2\,EJ/m\,(2\,l)^2 = 0{,}4; & \beta_b = 1/2\,m(2\,l) = 1{,}2,\end{cases}$$

$$\tilde{\bar{q}}_a = 0;\quad \tilde{\bar{q}}_b = -\left[\frac{9}{4\cdot 2\cdot 2}\left(1-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4\cdot 2\cdot 2}\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]\frac{l^2}{EJ} = -1{,}125,$$

$$\tilde{\bar{M}}_a = 0;\quad \tilde{\bar{M}}_b = \left[\frac{3}{2}\left(1-\frac{9}{4\cdot 4}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4\cdot 4}\right)\right] l = 1{,}125,$$

$$\tilde{w}_a = 0;\quad \tilde{w}_b = \left(\frac{27+1}{8\cdot 2\cdot 6}\right)\frac{l}{EJ} = 1{,}75,\quad (\Sigma\,\tilde{w}\,\mu)/m = \left(0\cdot\mu_a + 1{,}75\,\frac{1}{24}\right)\frac{24}{5} = 0{,}35.$$

$$\tilde{Q}_{a\,ges} = 0,\quad \tilde{Q}_{b\,ges} = 2\,P = 2.$$

Zahlenschema 1

$$\mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix}\varphi_l\\ \varphi_r\\ M_r\\ M_l\\ 1\end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} M_{0l} & M_{0r} & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -0{,}0193\\ 0{,}0038\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{L}_1\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & -1 & -5{,}5\\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & -6 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -7{,}5 & 0\\ -8 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}0038\\ -0{,}0193\\ 0{,}1411\\ -0{,}0113\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{L}_2\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & -6 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10 & -1 & 0\\ -1 & -9{,}5 & 0\\ 14 & 38 & 0\\ 80 & 17{,}5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0{,}0190\\ 0{,}1797\\ -0{,}6806\\ -0{,}0312\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{L}_3\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0 & -3 & -1 & -2\\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & -6 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 19{,}5 & 0\\ 1{,}6 & 5{,}7 & 0{,}1\\ -16{,}3 & -23{,}8 & -0{,}5\\ -80{,}6 & -21{,}2 & -0{,}1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}0069\\ -0{,}0400\\ -1{,}0264\\ 0{,}0041\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{L}_4\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0 & -3 & -1 & -2\\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & -6 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10{,}06 & -2{,}51 & -0{,}01\\ -1{,}95 & -3{,}52 & -0{,}06\\ 17{,}70 & 16{,}02 & 0{,}23\\ 81{,}43 & 23{,}405 & 0{,}14\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0{,}0096\\ 0{,}0537\\ -1{,}1650\\ 0{,}0166\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{L}_5\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0 & -3 & -1 & -2\\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & -6 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10{,}155 & 2{,}8425 & 0{,}016\\ 2{,}160 & 2{,}306 & 0{,}036\\ \boxed{-18{,}600} & \boxed{-11{,}7145} & \boxed{-0{,}155}\\ \boxed{-82{,}394} & \boxed{-24{,}795} & \boxed{-0{,}163}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}0358\\ -0{,}2724\\ 0{,}0000\\ 0{,}0000\\ 1\end{pmatrix}$$

Feld 2:

$$\left.\begin{aligned}\mu_a &= EJ/l^3 = 1/6\\ \mu_b &= 3\,EJ/l^3 = 1/2\end{aligned}\right\} m = \frac{1}{6}+\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\left\{\begin{aligned}\alpha_a &= EJ/m\,l^2 = 0{,}25;\quad \beta_a = 1/2\,m\,l = 0{,}75,\\ \alpha_b &= 3\,EJ/m\,l^2 = 0{,}75;\quad \beta_b = 1/2\,m\,l = 0{,}75,\end{aligned}\right.$$

$$\bar{\varphi}_a = 0,\quad \bar{\varphi}_b = -\frac{6\cdot 1}{24\cdot 3}\frac{l^3}{EJ} = -0{,}5,\quad \bar{Q}_{a\,ges} = 0,\quad \bar{Q}_{b\,ges} = 6,$$

$$\bar{\bar{M}}_a = 0,\quad \bar{\bar{M}}_b = \frac{6}{4}l^2 = 1{,}5,\quad \bar{w}_a = 0,\quad \bar{w}_b = \frac{6\cdot 1}{24\cdot 3}\frac{l^4}{EJ} = 0{,}5,\quad (\Sigma \bar{w}\,\mu)/m = 0 + \frac{0{,}5}{2}\frac{3}{2} = 0{,}375.$$

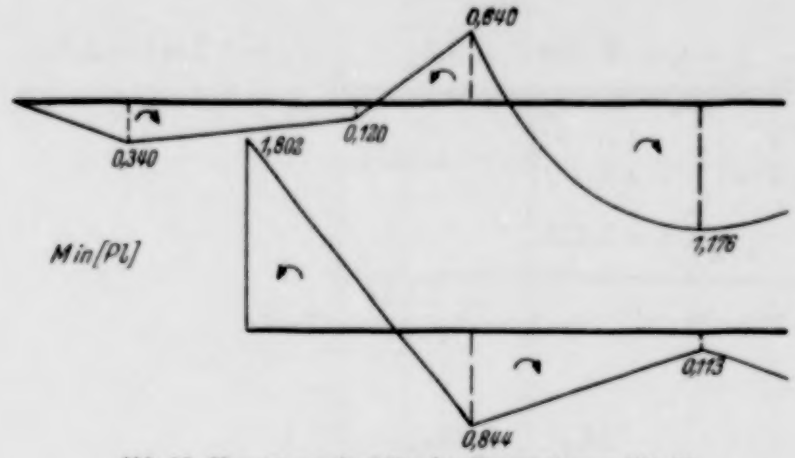


Abb. 15. Momentenverlauf für das Tragwerk von Abb. 13.

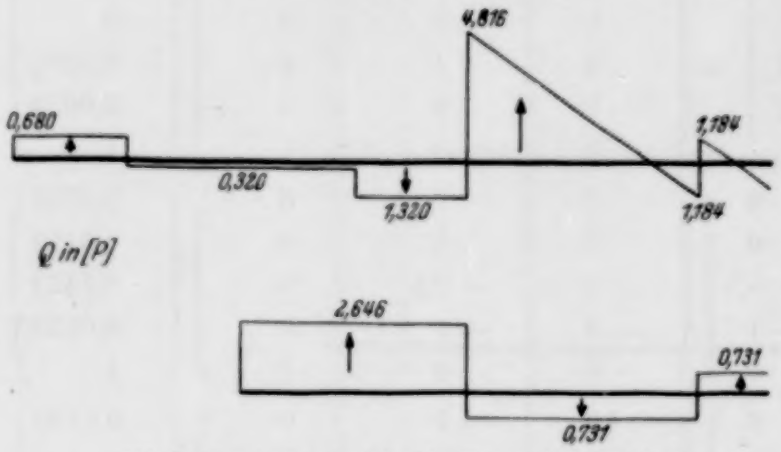


Abb. 16. Querkraftverlauf für das Tragwerk von Abb. 13.

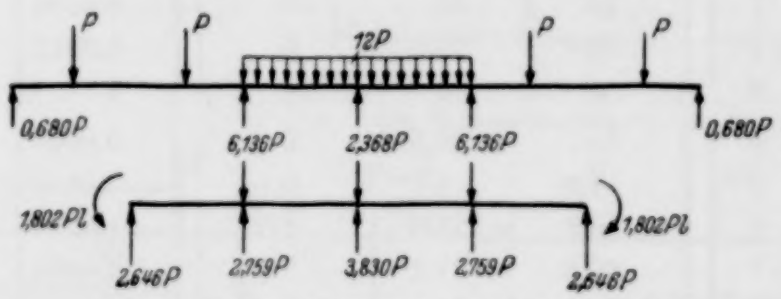


Abb. 17. Gleichgewichtssystem am Tragwerk von Abb. 13.

4) Siehe Zahlenschema 2.

5) Das im Zahlenschema eingerahmte Gleichungssystem (Randbedingungen Abb. 14!) hat die Lösungen:

$$\varphi_{0b} = -1{,}864154,$$
$$M_{0a} = 1{,}801790,$$
$$Q'_{0\,ges} = -3{,}325922.$$

6) Zahlenschema 2, Endspalte.

7) Entfällt.

8) Abb. 15 und 16.

9) Das Gleichgewichtssystem der Kräfte und Momente zeigt Abb. 17.

11. Verallgemeinerungen und Ergänzungen. 1) Die Steifigkeiten

EJ_y, EJ_z, GI und EF in II (3)

sind nicht konstant, sondern beliebige (oft unstetige) Funktionen der Koordinate x. Davon werden offensichtlich allein die Steifigkeitsmatrizen $\mathfrak{F}$ in II (15) betroffen. Da die Integration der Differentialgleichungen II (3) trivial ist, brauchen wir nicht weiter darauf einzugehen; beispielsweise wäre in II (10) die Matrix $\mathfrak{F}$, die dort wegen $\varrho = 1$ aus dem einzigenElement $-l/EF$ besteht, zu ersetzen durch

$$-\int_0^l \frac{d\xi}{E\,F(\xi)}. \tag{20}$$

2) Die vier Differentialgleichungen II (3) können teilweise miteinander gekoppelt sein (wenn z. B. der Schubmittelpunkt nicht mit dem Profilschwerpunkt zusammenfällt). Dann lautet lediglich das Fundamentalsystem anders; die Ordnung der Matrizen bleibt die gleiche.

3) Die gewählten Richtungen y und z in Abb. II (3) fallen nicht mit den Hauptträgheitsrichtungen des Balkenquerschnittes zusammen (schiefe Biegung). Dann sind die Belastungen q_z und q_y mit Hilfe des Ausdruckes

$$J_y\,J_z - J_{yz}^2 \tag{21}$$

in bekannter Weise zu kombinieren.

4) Federn mit Vorspannung. Wenn die Anschluß(koppel)federn in der unverformten (spannungslosen) Lage des Trägers nicht selbst entspannt sind wie in Abb. I (5), so gilt an Stelle von II (4) allgemeiner

$$k_i = -c_i(d_i - d_i^*) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{k} = -\mathfrak{C}(\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^*). \tag{22}$$

5) Verteilen der Belastung auf die Feldgrenzen. Oft kann es zweckmäßig sein, die in einem Feld angreifende Belastung auf beide Feldgrenzen zu verteilen. Zu diesem Zweck bringt man in $i-1$

$$r_0 = \begin{pmatrix} w \\ \varphi_a \\ \varphi_b \\ M_b \\ M_a \\ Q_{ges} \\ 1 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} \varphi_{0b} & M_{0a} & Q_{0ges} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}8642 \\ 0 \\ 1{,}8018 \\ -3{,}3259 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zahlenschema 2

| | | |

Die Elimination gelingt nur durch Übergriffe von einem Feld auf alle benachbarten (oft auch ferner liegende) Felder. Diese sich über das ganze Tragwerk hin erstreckende Kopplung	Die Grundgleichungen werden für jedes einzelne Feld getrennt und unabhängig voneinander aufgestellt. Diese Trennung
hat ein lineares Gleichungssystem von verhältnismäßig hoher	niedriger
Ordnung zur Folge. Die Systemmatrix ist	
stets symmetrisch und oft von Streifenform.	nicht symmetrisch und im allgemeinen voll ausgefüllt.
Nachdem dieses Gleichungssystem gelöst ist,	
liegen lediglich die eliminierten Größen vor.	sind nach einiger weiterer Rechnung Kraft- und Deformationsgrößen bekannt.

Die Vorzüge des Reduktionsverfahrens sind somit folgende:

a) Es entfällt der lästige Eliminationsvorgang.

b) Die Ordnung r des zu lösenden Gleichungssystem ist niedrig.

Sie ist insbesondere unabhängig vom Grade der statischen Unbestimmtheit und der Felderzahl.

c) Die gegebenen technischen Daten werden direkt oder doch in einfachsten Kombinationen in die Rechnung eingeführt.

d) Die praktische Rechnung besteht allein aus dem Bilden skalarer Produkte, ist deshalb einförmig und somit leicht programmierbar.

e) Man gewinnt Kraft- und Deformationsgrößen gleichzeitig, was besondere Vorteile bei der Ermittlung von Einflußlinien bietet.

Obgleich die vorgerechneten Beispiele genug Überzeugungskraft besitzen, ist selbstverständlich ein möglichst objektiver Vergleich des Rechenaufwandes erforderlich. Ein solcher Vergleich läßt sich exakt jedoch nur für Verfahren durchführen, deren Operationen von vornherein abzählbar sind, also nicht für Näherungsverfahren wie etwa das von *Cross* und andere, da deren Rechenaufwand in großem Maße von der Erfahrung und der Geschicklichkeit des Rechners abhängt. Mehrere zum Teil recht umfangreiche und deshalb hier nicht wiedergegebene Vergleiche zeigen in der Tat, daß das Reduktionsverfahren in fast allen praktisch vorkommenden Fällen weitaus weniger Operationen (Aufschreiben von Zahlen, Additionen und Multiplikationen) erfordert als die Eliminationsmethode, selbst wenn man annimmt, daß der Eliminationsvorgang ein für alle mal formelmäßig durchgeführt wurde und daher keine Mehrarbeit verursacht, wie etwa bei den bekannten Drei- bzw. Fünfmomentengleichungen und anderen [siehe auch I Ziff. 11].

13. Die vollständige Theorie des Reduktionsverfahrens. Zum Schluß wollen wir uns ganz von der speziellen Bedeutung des grundlegenden Differentialgleichungssystems II (3) lösen und nur noch voraussetzen, daß es linear sei (Biegen, Knicken, Schwingen[1,2,3], elastische Bettung, gekrümmte Rahmen[4] und dergleichen). Der Rechnungsgang läßt sich dann in großen Zügen etwa folgendermaßen umreißen:

1) Das dem Problem zugrunde liegende lineare Differentialgleichungssystem der Ordnung 2ϱ wird gelöst; man erhält ein Fundamentalsystem mit 2ϱ willkürlichen Integrationskonstanten und eine Partikularlösung.

2) Diese im allgemeinen mechanisch sinnlosen Integrationskonstanten werden ersetzt durch die Kraft- und Deformationsgrößen am linken Feldrand, was durch geeignete Linearkombination geschieht[5].

3) Damit ist auch der Zusammenhang zwischen den Kraft- und Deformationsgrößen an beiden Feldrändern hergestellt:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{L}_1 \mathfrak{x}_0, \qquad \mathfrak{x} = (\mathfrak{d}, \mathfrak{k}, 1), \tag{23}$$

wo $\mathfrak{d}$ bzw. $\mathfrak{k}$ die zueinander konjugierten Deformations- bzw. Kraftgrößen sind. Falls am rechten Ende Federreaktionen angreifen, wird die zunächst quadratische Matrix $\mathfrak{L}$ zu einer rechteckigen

---

[1] *K. Marguerre*, Math. Phys. 35 (1956) S. 28.

[2] *E. Pestel* und *G. Schumpich*, Schiffstechnik 4 (1957) S. 55.

[3] *S. Falk*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 9 (1957) S. 1.

[4] *G. Schumpich*, Beitrag zur Kinetik und Statik ebener Stabwerke mit gekrümmten Stäben. Diss. Hannover 1957.

[5] *S. Falk*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 7 (1955) S. 74.

Leitmatrix mit $2\varrho+1$ Zeilen und $3\varrho+1$ Spalten erweitert; die Vorschrift (23) ist dann als verschränkte Multiplikation aufzufassen.

4) Jetzt haben wir drei verschiedene Typen von Tragwerken zu unterscheiden:

a) Durchlaufträger. Für n aufeinander folgende Felder gibt (23)

$$\mathfrak{x}_n = \mathfrak{L}_n \mathfrak{L}_{n-1} \cdots \mathfrak{L}_1 \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{P}_n \mathfrak{x}_0 . \tag{24}$$

b) Verzweigte offene Tragwerke. Diese werden durch einen einfachen Kunstgriff auf einen oder mehrere Durchlaufträger zurückgeführt (Koppelfedern).

c) Geschlossene Tragwerke. Aus diesen läßt sich stets eine Anzahl s von durchlaufenden Strängen herauslösen, deren Gesamtheit man nach geeigneter Erweiterung des Vektors $\mathfrak{x}$ und der zugehörigen Leitmatrix ebenfalls wie einen einzigen Durchlaufträger behandeln kann.

5. Auf jeden Fall sind damit sämtliche überhaupt in der Rechnung auftretenden Kraft- und Deformationsgrößen nach (24) lineare Funktionen der im Anfangsvektor $\mathfrak{x}_0$ vereinigten ϱ bzw. $r = \varrho_1 + \cdots + \varrho_s$ Paare von Integrationskonstanten. Aus jedem dieser Paare verschwindet genau eine Größe infolge der r Randbedingungen links; die übrigen gehen als Freigrößen $(A_1, A_2, \ldots A_r) = \mathfrak{a}$ durch die ganze Rechnung hindurch. Die r Randbedingungen rechts liefern zu ihrer Bestimmung das lineare Gleichungssystem

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{r} = 0 . \tag{25}$$

6) Hier unterscheiden wir drei Fälle:

a) Ist $|\mathfrak{A}| \neq 0$, so folgt $\mathfrak{a} = -\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{r}$.

b) Falls $\mathfrak{r} = 0$ ist (homogene Probleme), stellt $|\mathfrak{A}| = 0$ als notwendige Bedingung für nichttriviale Lösungen eine Bestimmungsgleichung für gewisse in der Rechnung mitgeführte Parameter dar. Die Wurzeln dieser Gleichung heißen Eigenwerte (kritische Knicklasten, Eigenfrequenzen usw.) und die zugehörigen Eigenvektoren $\mathfrak{a}$ sind bis auf einen willkürlichen Faktor ebenfalls bestimmbar.

c) Wenn $|\mathfrak{A}| = 0$, aber $\mathfrak{r} \neq 0$, so sind Lösungen nur möglich, wenn $\mathfrak{r}$ gewissen Bedingungen genügt.

7) Mit $\mathfrak{a}$ zugleich liegt nun der Anfangsvektor $\mathfrak{x}_0$ und damit die Gesamtheit der Kraft- und Deformationsgrößen an allen Feldgrenzen fest. Das grundlegende Fundamentalsystem liefert daraus auch den funktionalen Verlauf der an der Deformation beteiligten Kraft- und Deformationsgrößen über dem ganzen Rahmentragwerk, womit das Problem erschöpfend gelöst ist.

14. Zusammenfassung. Wir haben gesehen, wie sich auf Grund der Gleichungen II (3) oder irgendeines anderen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems und einiger zweckmäßig eingeführter Begriffe wie Reduktion, Feldgrenze, Koppelfeder, Strangschar usw. die große Mannigfaltigkeit ebener und räumlicher Rahmentragwerke theoretisch erfassen, aber auch zahlenmäßig berechnen läßt. Insgesamt acht vorgeführte Beispiele und ein allgemeines Programm für digitale Rechenautomaten zeigen den praktischen Wert des Verfahrens auf; seine Überlegenheit über die bis heute gebräuchlichen Eliminationsmethoden beweist ein objektiver Vergleich.

(Eingegangen am 13. Mai 1957)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Sigurd Falk*, Braunschweig, Celler Str. 93a

Nichtlineare Schwingungen bei zwei Freiheitsgraden

II. Mitteilung

Von **C. Schmieden**

Heinrich Graf zum sechzigsten Geburtstage gewidmet

1. Einleitung. In der vorliegenden Arbeit werden die erzwungenen Schwingungen für das gleiche System von zwei Freiheitsgraden und nichtlinearen Rückstellkräften, aber unter Vernachlässigung der Dämpfung behandelt, dessen freie Schwingungen in einer früheren Arbeit gleichen Titels — im folgenden mit I zitiert[1] — untersucht wurden.

Um alle Komplikationen der hier möglichen Schwingungsformen zu erfassen, ist es notwendig, die Approximation der Lösung ebensoweit zu treiben, wie das in I der Fall war, da es nur so möglich ist, die Frage nach der Konvergenz der *Fourier*-Entwicklung der Lösung wirklich präzise zu beantworten. Denn wenn man auch auf Grund allgemeiner Existenzsätze für hinreichend kleine Werte des Koeffizienten β der nichtlinearen Glieder und der Amplitude der äußeren Kraft der Existenz der Lösung sicher sein kann, so darf man doch aus diesem Tatbestand nicht ohne weiteres die Berechtigung herleiten, sich bei einer Näherungslösung nicht einmal um die Größenordnung der nicht berücksichtigten Glieder zu kümmern, insbesondere dann nicht, wenn die Amplituden der äußeren Kraft oder des Ausschlages selbst Werte annehmen, die groß gegen β sind. Um aber die erforderlichen Rechnungen nicht unnötig zu komplizieren, behandeln wir im ersten Abschnitt zunächst die sehr viel einfachere Differentialgleichung von *Duffing* für einen Freiheitsgrad, und zwar in einer wesentlich weitergehenden Approximation, als das bisher geschehen ist, mit dem Ziele, das Konvergenzverhalten der Lösung dieser Differentialgleichung voll aufzuklären. Bei der Lösung des Systems von zwei Freiheitsgraden werden wir uns dann auf diese Rechnung beziehen können, soweit sich die Analogie zwischen einem und zwei Freiheitsgraden durchführen läßt. Das geschieht im zweiten Abschnitt. Der dritte Abschnitt bringt dann die Untersuchung derjenigen Phänomene bei zwei Freiheitsgraden, die keine Analogie für einen Freiheitsgrad besitzen, also das eigentlich Interessante der Untersuchung darstellen. Sie treten dann auf, wenn sich die Eigenfrequenzen für kleine Schwingungen annähernd wie $1:3$ verhalten — allgemein, wenn dies Verhältnis $1:2n+1$ ist. Denn dann steht die erste Ultraharmonische — allgemein die n-te — der Oberschwingung in Resonanz zur Grundschwingung, ebenso die erste Subharmonische — allgemein die n-te — der Grundschwingung in Resonanz zur Oberschwingung. Für solche Systeme treten bei den erzwungenen Schwingungen in der Nähe der Resonanzstellen nicht nur, wie üblich, bis zu drei mögliche Lösungen, sondern in der Nachbarschaft der Grundfrequenz ebenso wie in der der Oberschwingung bis zu neun mögliche Lösungen auf. Auf die Frage der Stabilität dieser Lösungen wird in dieser Arbeit nicht eingegangen, ebenso auch nicht auf die Modifikation dieser Lösungen durch Hinzunahme eines Dämpfungsgliedes.

I. Integration der inhomogenen Differentialgleichung von *Duffing*. 2. Die Grundlösung. Wir gehen aus von der inhomogenen Differentialgleichung von *Duffing* mit verschwindendem Dämpfungsglied

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \beta \omega_0^2 q^3 = F \omega_0^2 \sin \Omega t \tag{1}$$

und setzen voraus, daß die Amplitude der erregenden äußeren Kraft endlich, also groß gegen den Parameter β des nichtlinearen Gliedes ist. Wir stellen zunächst die Grundlösung auf, untersuchen deren Konvergenzgrenzen, diskutieren die Ultraharmonischen, also die Lösung in der Umgebung der Stellen, an denen sich $\Omega : \omega_0$ wie $1 : 2n + 1$ verhält, und zeigen schließlich, daß sich eine Verzweigung der Grundlösung immer dann berechnen läßt, wenn das Verhältnis von $\Omega : \omega_0$ eine rationale Zahl darstellt, mit Ausnahme der den Ultraharmonischen zugeordneten reziproken ungeraden ganzen Zahlen. Verzweigungen treten also nicht nur für die Subharmonischen ungerader Ordnung, wie schon seit langem bekannt, auf, sondern prinzipiell immer, wenn Ω und ω_0 in rationalem Verhältnis stehen. Da aber die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden überall dicht liegen, gilt das auch für die Verzweigungspunkte: jeder Punkt auf der Amplituden-Frequenz-Kurve —

[1] *C. Schmieden*, Ing.-Arch. 25 (1957) S. 292.

kurz mit „Response-Kurve" bezeichnet — mit einer rationalen Abszisse ist ein Verzweigungspunkt! Machen wir nun in (1) die Substitution

$$\tau = \omega_0 t \sqrt{1+\varkappa}\,, \qquad \frac{dq}{d\tau} = q' \tag{2}$$

so geht sie über in

$$(1+\varkappa)\,q'' + q + \beta\,q^3 = F \sin\left(\frac{\Omega\,\tau}{\omega_0\sqrt{1+\varkappa}}\right). \tag{3}$$

Wir setzen nunmehr an

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 1+\varkappa\,, \qquad q = \Theta_1 \sin\tau + \Theta_3 \sin 3\tau + \cdots \tag{4}$$

und denken uns $\varkappa$ und die Θ_i in Potenzreihen nach dem als klein vorausgesetzten Parameter β entwickelt:

$$\left.\begin{aligned} 1+\varkappa &= 1+\varkappa_0+\varkappa_1\beta+\varkappa_2\beta^2+\cdots, \qquad \Theta_1 = A, \\ \Theta_3 &= \vartheta_{30}+\vartheta_{31}\beta+\cdots, \qquad \Theta_5 = \vartheta_{50}+\vartheta_{51}\beta+\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

A übernimmt dabei die Rolle des Parameters.

Dabei wird sich zeigen, daß von Ausnahmebereichen abgesehen, die Θ_{2n+1} proportional zu β^n werden.

Wir haben nun zunächst die dritte Potenz von q zu bilden, wobei wir nur die Terme angeben wollen, die im folgenden an irgendeiner Stelle wirklich gebraucht werden. Also [vgl. I, (9)]

$$4\,q^3 = Q_1 \sin\tau + Q_3 \sin 3\tau + \cdots + Q_9 \sin 9\tau \tag{5}$$

mit

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 3\,(\Theta_1^3 - \Theta_1^2\,\Theta_3 + 2\,\Theta_1\,\Theta_3^2 - 2\,\Theta_1\,\Theta_3\,\Theta_5 + \Theta_3^2\,\Theta_5 - \Theta_3^2\,\Theta_7)\,,\\
Q_3 &= -\,\Theta_1^3 + 3\,(2\,\Theta_1^2\,\Theta_3 + \Theta_3^3 - \Theta_1^2\,\Theta_5 + 2\,\Theta_1\,\Theta_3\,\Theta_5 - 2\,\Theta_1\,\Theta_3\,\Theta_7 - \Theta_3^2\,\Theta_9)\,,\\
Q_5 &= 3\,(-\,\Theta_1^2\,\Theta_3 + \Theta_1\,\Theta_3^2 + 2\,\Theta_1^2\,\Theta_5 - \Theta_1^2\,\Theta_7 + 2\,\Theta_1\,\Theta_3\,\Theta_7 - 2\,\Theta_1\,\Theta_3\,\Theta_9 + 2\,\Theta_3^2\,\Theta_5)\,,\\
Q_7 &= 3\,(-\,\Theta_1\,\Theta_3^2 - \Theta_1^2\,\Theta_5 + 2\,\Theta_1^2\,\Theta_7 - \Theta_1^2\,\Theta_9 + 2\,\Theta_1\,\Theta_3\,\Theta_5 + 2\,\Theta_1\,\Theta_3\,\Theta_9 + 2\,\Theta_3^2\,\Theta_7)\,,\\
Q_9 &= -\,\Theta_3^3 + 3\,(-\,\Theta_1^2\,\Theta_7 + 2\,\Theta_1^2\,\Theta_9 - 2\,\Theta_1\,\Theta_3\,\Theta_5 + 2\,\Theta_1\,\Theta_3\,\Theta_7 + 2\,\Theta_3^2\,\Theta_9)\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

Ist nun Θ_3 klein gegen Θ_1 von der Ordnung β, so sieht man aus (6) sofort, daß dann Θ_5 von der Ordnung β^2 usw. wird. Also setzen wir an

$$\Theta_1 = A\,, \qquad \Theta_3 = \beta\,\vartheta_3\,, \qquad \Theta_5 = \beta^2\,\vartheta_5\,, \qquad \Theta_7 = \beta^3\,\vartheta_7\,, \qquad \Theta_9 = \beta^4\,\vartheta_9\,; \tag{7}$$

dann reduzieren sich die Q_i, wenn man Terme der Ordnung β^3 in ihnen streicht, auf

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 3\,(A^3 - \beta\,A^2\,\vartheta_3 + 2\,\beta^2\,A\,\vartheta_3^2)\,,\\
Q_3 &= (-\,A^3 + 6\,\beta\,A^2\,\vartheta_3 - 3\,\beta^2\,A^2\,\vartheta_5)\,,\\
Q_5 &= 3\,(-\,\beta\,A^2\,\vartheta_3 + \beta^2\,A\,\vartheta_3^2 + 2\,\beta^2\,A^2\,\vartheta_5)\,,\\
Q_7 &= 3\,(-\,\beta^2\,A^2\,\vartheta_5 - \beta^2\,A\,\vartheta_3^2)\,, \qquad Q_9 = 0\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Damit erhalten wir durch Koeffizientenvergleich nach dem Sinus:

$$\left.\begin{aligned}
[\sin\tau]: &\qquad -(1+\varkappa)\,A + A + \frac{\beta}{4}\,Q_1 = F\,,\\
[\sin 3\tau]: &\qquad -9\,(1+\varkappa)\,\beta\,\vartheta_3 + \beta\,\vartheta_3 + \frac{\beta}{4}\,Q_3 = 0\,,\\
[\sin 5\tau]: &\qquad -25\,(1+\varkappa)\,\beta^2\,\vartheta_5 + \beta^2\,\vartheta_5 + \frac{\beta}{4}\,Q_5 = 0\,,\\
[\sin 7\tau]: &\qquad -49\,(1+\varkappa)\,\beta^3\,\vartheta_7 + \beta^3\,\vartheta_7 + \frac{\beta}{4}\,Q_7 = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

In diesen Gleichungen machen wir nun Koeffizientenvergleich nach β und erhalten damit die endgültigen Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Koeffizienten:

$$
\left.
\begin{aligned}
&[\beta^0]: \quad 1+\varkappa_0 = 1-\frac{F}{A}, \qquad \text{also} \qquad \varkappa_0 = -\frac{F}{A},\\
&[\beta^1]: \quad -\varkappa_1 A + \frac{3}{4} A^3 = 0, \qquad (8+9\varkappa_0)\,\vartheta_{30} = -\frac{A^3}{4},\\
&[\beta^2]: \quad \begin{cases} -\varkappa_2 A - \frac{3}{4} A^2 \vartheta_{30} = 0, \qquad -(8+9\varkappa_0)\,\vartheta_{31} - 9\varkappa_1 \vartheta_{30} + \frac{3}{4} A^2 \vartheta_{30} = 0,\\ -(24+25\varkappa_0)\,\vartheta_{50} - \frac{3}{4} A^2 \vartheta_{30} = 0, \end{cases}\\
&[\beta^3]: \quad \begin{cases} -\varkappa_3 A + \frac{3}{4}(2 A \vartheta_{30}^2 - A^2 \vartheta_{31}) = 0,\\ -(8+9\varkappa_0)\,\vartheta_{32} - 9\varkappa_1 \vartheta_{31} - 9\varkappa_2 \vartheta_{30} + \frac{3A^2}{4}(2\vartheta_{31} - \vartheta_{50}) = 0,\\ -(24+25\varkappa_0)\,\vartheta_{51} - 25\varkappa_1 \vartheta_{50} + \frac{3}{4} A (\vartheta_{30}^2 - A\vartheta_{31} + 2A\vartheta_{50}) = 0,\\ -(48+49\varkappa_0)\,\vartheta_{70} - \frac{3}{4} A (\vartheta_{30}^2 + A\vartheta_{50}) = 0. \end{cases}
\end{aligned}
\right\} \tag{10}
$$

Für die Berechnung von $\varkappa_4$ ist, wie ein Blick auf die allgemeinen Formeln (6) für die Q_i zeigt, nur die Kenntnis der aus der letzten Gleichungsgruppe anfallenden Koeffizienten erforderlich:

$$
-\varkappa_4 A + \frac{3}{4}(-A^2\vartheta_{32} + 4A\vartheta_{30}\vartheta_{31} - 2A\vartheta_{30}\vartheta_{50}) = 0. \tag{11}
$$

Die Auflösung dieser Gleichungen (10) und (11) liefert nun

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varkappa_1 = \frac{3}{4}A^2, \qquad \vartheta_{30} = -\frac{A^3}{4(8+9\varkappa_0)},\\
&\varkappa_2 = \frac{3}{16}\cdot\frac{A^4}{8+9\varkappa_0}, \qquad \vartheta_{31} = \frac{21}{16}\cdot\frac{A^5}{(8+9\varkappa_0)^2}, \qquad \vartheta_{50} = \frac{3}{16}\cdot\frac{A^5}{(8+9\varkappa_0)(24+25\varkappa_0)},\\
&\varkappa_3 = -\frac{57}{64}\frac{A^6}{(8+9\varkappa_0)^2}, \qquad \vartheta_{32} = -\frac{207}{32}\frac{A^7}{(8+9\varkappa_0)^3} - \frac{9}{64}\frac{A^7}{(8+9\varkappa_0)^2(24+25\varkappa_0)},\\
&\varkappa_4 = \frac{45A^8}{256}\left[\frac{22}{(8+9\varkappa_0)^3} + \frac{1}{(8+9\varkappa_0)^2(24+25\varkappa_0)}\right].
\end{aligned}
\right\} \tag{12}
$$

Die Angabe von ϑ_{51} und ϑ_{70} ist überflüssig; man benötigt sie erst für $\varkappa_5$. Um die Frage der Konvergenzgrenze unserer Entwicklung zu beantworten, genügt aber bereits die Kenntnis der bisher berechneten Terme, da sie, ebenso wie der Bau unseres Gleichungssystems, eindeutig erkennen lassen, daß diese Entwicklung divergieren muß, wenn einer der Faktoren $(8+9\varkappa_0)$, $(24+25\varkappa_0)$, ... in die Größenordnung von β kommt. Wir wollen die Gleichung der Response-Kurve anschreiben:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{F}{A} + \frac{3}{4}\beta A^2 + \frac{3}{16}\frac{\beta^2 A^4}{(8+9\varkappa_0)} - \frac{57}{64}\frac{\beta^3 A^6}{(8+9\varkappa_0)^2}\\
+ \frac{45\beta^4 A^8}{256}\left[\frac{22}{(8+9\varkappa_0)^3} + \frac{1}{(8+9\varkappa_0)(24+25\varkappa_0)}\right] + \cdots
\end{aligned} \tag{13}
$$

mit

$$
q = A\sin\tau + \beta\vartheta_3 \sin 3\tau + \beta^2\vartheta_5 \sin 5\tau + \beta^3\vartheta_7 \sin 7\tau + \cdots. \tag{14}
$$

Diese Formeln stellen offenbar gut konvergente Reihen, selbst für endliche, nicht zu große β, dar, solange A hinreichend weit von den kritischen Werten

$$
A_1 = \frac{9}{8}F, \qquad A_2 = \frac{25}{24}F \ldots
$$

entfernt ist. Setzen wir daher in der Umgebung der ersten kritischen Stelle

$$A = \frac{9}{8} F + x\sqrt{\beta} \equiv F_0 + x\sqrt{\beta} \quad , \tag{15}$$

so erhalten wir

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9}\frac{x\sqrt{\beta}}{F_0}\frac{1}{1+\frac{x\sqrt{\beta}}{F_0}} + \frac{3}{4}\beta F_0^2\left(1+\frac{x\sqrt{\beta}}{F_0}\right)^2 + \frac{3}{128}\frac{\beta^{3/2}F_0^5}{x}\left(1+\frac{x\sqrt{\beta}}{F_0}\right)^5 + \cdots \tag{16}$$

und eine ähnliche Entwicklung von q, von der wir nur die beiden ersten Glieder anschreiben:

$$q = \left(F_0 + x\sqrt{\beta}\right)\sin\tau - \frac{\sqrt{\beta}\,F_0^4}{32\,x}\left(1+\frac{x\sqrt{\beta}}{F_0}\right)^4 \sin 3\tau\left[1 - \frac{21}{32}\frac{\sqrt{\beta}\,F_0^3}{x}\left(1+\frac{x\sqrt{\beta}}{F_0}\right)^3 + \cdots\right]. \tag{17}$$

Beide Entwicklungen versagen offenbar für hinreichend kleine Werte von x, da nämlich in der Nähe der Resonanzstelle der ersten ungeraden Oberschwingung $\Omega \approx \frac{\omega_0}{3}$ der Koeffizient von $\sin 3\tau$ von der gleichen Größenordnung wie A wird und damit unsere Grundannahme über die Größenordnung der *Fourier*-Koeffizienten hinfällig wird.

3. Die Response-Kurve in der Nähe der Resonanz der Oberschwingung der Ordnung 3 (erste Ultraharmonische). Wird, wie es hier offenbar der Fall ist, Θ_3 endlich, so treten in der Entwicklung von q^3 bis hin zu $\sin 9\tau$ endliche Terme auf; diese Glieder sind also zu berücksichtigen, wenn man die Lösung auch nur bis auf die Glieder der Ordnung β einschließlich bestimmen will. Zweckmäßigerweise läßt man jetzt den Koeffizienten ϑ_{30} die Rolle des freien Parameters übernehmen, setzt also mit $F = \frac{8}{9} F_0$ an

$$\Theta_1 = F_0 + \beta\,\vartheta_{11} + \cdots, \qquad \Theta_3 = B, \qquad \Theta_5 = \beta\,\vartheta_{50} + \cdots, \qquad \Theta_9 = \beta\,\vartheta_{90} + \cdots \tag{18}$$

und

$$1 + \varkappa = 1 + \varkappa_0^* + \varkappa_1\beta + \varkappa_2\beta^2 + \cdots. \tag{19}$$

In den (9) entsprechenden Gleichungen sind jetzt für die Q_i die vollständigen Ausdrücke (6) einzusetzen, also z. B.

$$-(1+\varkappa)\Theta_1 + \Theta_1 + \frac{3}{4}\beta\left(\Theta_1^3 - B\,\Theta_1^2 + 2\,B^2\,\Theta_1 - 2\,B\,\Theta_1\,\Theta_5 + B^2\,\Theta_5 - B^2\,\Theta_7\right) = \frac{8}{9}F_0.$$

Der Koeffizientenvergleich in β liefert jetzt

$$[\beta^0]: \quad \left\{\begin{aligned} &-\varkappa_0^* F_0 = \frac{8}{9}F_0, \qquad \text{also} \qquad \varkappa_0^* = -\frac{8}{9}, \qquad 1+\varkappa_0^* = \frac{1}{9}, \\ &-9\,(1+\varkappa_0^*)\,B + B = 0, \qquad \text{also} \qquad -B + B = 0, \end{aligned}\right\}$$

$$[\beta^1]: \quad \left\{\begin{aligned} &-\varkappa_0^*\,\vartheta_{11} - \varkappa_1 F_0 + \frac{3}{4}\left(F_0^3 - B\,F_0^2 + 2\,B^2 F_0\right) = 0, \\ &-9\,\varkappa_1 B + \frac{1}{4}\left(-F_0^3 + 6\,B\,F_0^2 + 3\,B^3\right) = 0, \\ &-\frac{25}{9}\vartheta_{50} + \vartheta_{50} + \frac{3}{4}\left(B^2 F_0 - B\,F_0^2\right) = 0, \\ &-\frac{49}{9}\vartheta_{70} + \vartheta_{70} - \frac{3}{4}B^2 F_0 = 0, \\ &-9\,\vartheta_{90} + \vartheta_{90} - \frac{1}{4}B^3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

mit den Lösungen

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{1}{36B}\left(3\,B^3 + 6\,B\,F_0^2 - F_0^3\right), \\ \vartheta_{11} &= \frac{9}{8}F_0\varkappa_1 - \frac{27}{32}\left(F_0^3 - B\,F_0^2 + 2\,B^2 F_0\right), \\ \vartheta_{50} &= \frac{27}{64}B\,F_0\left(B - F_0\right), \qquad \vartheta_{70} = -\frac{27}{160}B^2 F_0, \qquad \vartheta_{90} = -\frac{1}{32}B^3. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Damit werden jetzt Glieder in β^2 berechenbar; wir beschränken uns auf

$$B\,\varkappa_2 = \frac{1}{12}\left[-F_0^2\,\vartheta_{11} + 4\,B\,F_0\,\vartheta_{11} - F_0^2\,\vartheta_{50} + 2\,B\,F_0\,(\vartheta_{50} - \vartheta_{70}) - B^2\,\vartheta_{90}\right]. \tag{22}$$

Setzt man alles ein, so erhält man schließlich:

$$\varkappa_2 = \frac{1}{3\cdot 2^7\,B^2}\left[F_0^2\,(4\,B - F_0)\,(27\,B^2\,F_0 - 21\,B\,F_0^2 - 51\,B^3 - F_0^3) + \right.$$
$$\left. + \frac{27}{2}\,B^2\,F_0^2\,(B - F_0)\,(2\,B - F_0) + \frac{54}{5}\,B^4\,F_0^2 + B^6\right]. \tag{23}$$

Unsere jetzige Lösung ist natürlich nur wieder zu gebrauchen für Werte von B, die groß gegen β sind. Setzt man also $B = -y\sqrt{\beta}$, so gilt in erster Näherung

$$\vartheta_{11} \sim -\frac{F_0^4}{32\,B} = \frac{F_0^4}{32\,y\sqrt{\beta}}. \tag{24}$$

Also für

$$x = \vartheta_{11}\sqrt{\beta} = \frac{F_0^4}{32\,y}$$

wird

$$q = (F_0 + x\sqrt{\beta})\sin\tau - y\sqrt{\beta}\sin 3\,\tau = (F_0 + x\sqrt{\beta})\sin\tau - \frac{\sqrt{\beta}\,F_0^4}{32\,x}\sin 3\,\tau, \tag{25}$$

was in dieser Näherung mit (17) übereinstimmt. Die Konvergenz-Bereiche beider Entwicklungen überdecken sich also, so daß jede innerhalb ihres Konvergenzbereiches als die Fortsetzung der anderen benutzt werden kann.

Ist B endlich und groß gegen F_0, so ist die Amplitude $|\,q\,|_{max}$ wesentlich durch B gegeben, so daß wir als Response-Kurve erhalten

$$\left(\frac{3\,\Omega}{\omega_0}\right)^2 - \frac{3\,\beta}{4}\,B^2 = 1 + \frac{3\,\beta}{2}\,F_0 - \frac{\beta\,F_0^3}{4\,B} + [\beta^2], \tag{26}$$

also als Skelett eine Hyperbel mit den Achsen

$$a = \frac{\omega_0}{3}\sqrt{1 + \frac{3\,\beta}{2}\,F_0^2}\,; \qquad b = \frac{2}{\sqrt{3\,\beta}}\sqrt{1 + \frac{3\,\beta}{2}\,F_0^2}\,. \tag{27}$$

Für große positive B verläuft die Response-Kurve links von dieser Hyperbel, für große negative B rechts von ihr.

Kommt B in die Größenordnung von F_0, so muß man bei der Amplitude auch das Glied mit $\sin\tau$ mitberücksichtigen. Für negative B

$$B = -x\,F_0 \quad (x > 0) \tag{28}$$

wird $|\,q\,|_{max}$ für $\tau = \pi/2$ erreicht, da sich hier wirklich alle Terme der *Fourier*-Reihe addieren. Es kommt

$$q = F_0\,(1 + x) + \frac{\beta\,F_0^3}{32}\left(\frac{1}{x} - 21 - \frac{27}{2}\,x - \frac{321}{10}\,x^2 + x^3\right) + [\beta^2]. \tag{29}$$

Bestimmen wir das Minimum dieser Funktion, so erhalten wir für x

$$\frac{dq}{dx} = 0, \qquad \text{also} \qquad 3\,x^4 - \frac{321}{5}\,x^3 - \frac{27}{2}\,x^2 - 1 + \frac{32}{\beta\,F_0^2}\,x^2 = 0 \tag{29a}$$

mit dem annähernden Wert der Wurzel $x \approx \dfrac{F_0\sqrt{\beta}}{4\sqrt{2}}$.

Dies ist also die Stelle, wo die Response-Kurve zwischen ω_0 und $\omega_0/3$ ihr Minimum erreicht. Zu diesem Wert von x gehören

$$q_{min} = F_0 + \frac{F_0^2\sqrt{\beta}}{2\sqrt{2}} + [\beta], \qquad \Omega = \frac{\omega_0}{3}\left\{1 + \frac{F_0\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}} + [\beta]\right\}. \tag{30}$$

Zu diesem Minimum von q gehört der Wert

$$\Theta_1 = F_0 + \frac{\sqrt{2\,\beta}}{8}\,F_0^2 + [\beta]. \tag{30a}$$

Da nun offenbar die Konvergenzgrenze der Entwicklungen (16) und (17) an der Stelle des Minimums der Response-Kurve zwischen $\omega_0/3$ und ω_0 liegen muß, folgt, daß mit

$$x_{min} \approx \frac{81\sqrt{2}}{512} F_0^2 \tag{31}$$

diese Entwicklungen konvergieren für $|x| > x_{min}$.

Der Verlauf der Response-Kurve in der Umgebung der Stelle $\omega_0/3$ ist also qualitativ der gleiche wie an der Hauptresonanzstelle ω_0, nur daß die Schwingung wesentlich mit der dreifachen Frequenz der äußeren Kraft vor sich geht (erste Ultraharmonische). Jedenfalls tritt aber keine Verzweigung der Lösung auf.

Ganz Entsprechendes gilt für die höheren Resonanzen ungerader Ordnung. Ein ganz anderes Verhalten liegt bei den Resonanzen der Oberschwingungen gerader Ordnung und bei den Subharmonischen aller Ordnungen vor: hier ergibt sich jeweils eine echte Verzweigung der Lösung. Wir wollen das hier nur für die Subharmonische der Ordnung 1/3 zeigen, weil hier die Rechnung am einfachsten verläuft, und anschließend für die Oberschwingung der Ordnung 2.

4. Die Subharmonische der Ordnung 1/3. Wir setzen in (3) jetzt

$$\frac{\Omega}{\omega_0\sqrt{1+\varkappa}} = 3, \qquad \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 9(1+\varkappa); \tag{32}$$

die äußere Kraft ist also durch $F \sin 3\tau$ gegeben. Um die Subharmonische zu erhalten, setzen wir an

$$\Theta_1 = A, \qquad \Theta_3 = \vartheta_{30} + \beta\,\vartheta_{31} + \cdots, \qquad \Theta_5 = \beta\,\vartheta_{50} + \cdots, \qquad \Theta_9 = \beta\,\vartheta_{90} + \cdots. \tag{33}$$

Damit erhalten wir als Gleichungen nullter Ordnung in β

$$\left.\begin{aligned} -(1+\varkappa_0)A + A = 0, \qquad &\text{also} \qquad \varkappa_0 A = 0, \\ -9(1+\varkappa_0)\vartheta_{30} + \vartheta_{30} = F. \qquad & \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Soll $A \neq 0$ sein, so muß $\varkappa_0 = 0$ und damit $\vartheta_{30} = -F/8$ sein.

Die andere mögliche Lösung $A = 0$, $\varkappa_0 \neq 0$ liefert eine Amplitude, die mit einem Gliede proportional $\sin 3\tau$ beginnt. Man erhält hier

$$-(8+9\varkappa_0)\vartheta_{30} = F, \qquad \text{also} \qquad \varkappa_0 = -\frac{F+8\vartheta_{30}}{9\vartheta_{30}}, \qquad 1+\varkappa_0 = \frac{1}{9} - \frac{F}{9\vartheta_{30}},$$

also

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 9(1+\varkappa_0) = 1 - \frac{F}{\vartheta_{30}}.$$

Das ist aber gerade der Anfang der Grundlösung, nur in anderer Bezeichnung: A ist durch ϑ_{30}, τ durch 3τ ersetzt.

Für die Subharmonische, also $A \neq 0$, folgen nun als Gleichungen der Ordnung β

$$\left.\begin{aligned} &-\varkappa_1 A + \frac{3}{4}(A^3 - A^2\vartheta_{30} + 2A\vartheta_{30}^2) = 0, \\ &-8\vartheta_{31} - 9\varkappa_1\vartheta_{30} + \frac{1}{4}(-A^3 + 6A^2\vartheta_{30} + 3\vartheta_{30}^3) = 0, \\ &-24\vartheta_{50} + \frac{3}{4}A\vartheta_{30}(\vartheta_{30} - A) = 0, \quad -48\vartheta_{70} - \frac{3}{4}A\vartheta_{30}^2 = 0, \quad -80\vartheta_{90} - \frac{1}{4}\vartheta_{30}^3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

und in der Ordnung β^2

$$-\varkappa_2 A + \frac{3}{4}(-A^2\vartheta_{31} + 4A\vartheta_{30}\vartheta_{31} - 2A\vartheta_{30}\vartheta_{50} + \vartheta_{30}^2(\vartheta_{50} - \vartheta_{70})) = 0 \tag{36}$$

mit den Lösungen

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{50} &= \frac{AF}{2^{11}}(F+8A), \qquad \vartheta_{70} = -\frac{AF^2}{2^{12}}, \qquad \vartheta_{90} = \frac{F^3}{5\cdot 2^{15}}, \\ \vartheta_{31} &= \frac{1}{2^{14}}(51F^3 + 21\cdot 2^6 A^2 F + 6^3 A F^2 - 2^9 A^3), \\ \varkappa_1 &= \frac{3}{2^7}(F^2 + 4AF + 32A^2), \\ \varkappa_2 &= \frac{3}{8}\left[-\vartheta_{31}(2A+F) + \frac{AF^2}{2^{12}}(F+8A) + \frac{F^3}{2^{17}}(16A+3F)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Für $A > 0$ wird die maximale Amplitude für $\tau = \pi/2$ erreicht, also

$$q = A + \frac{F}{8} + [\beta], \qquad A = q - \frac{F}{8} + [\beta].$$

Setzt man diesen Wert von A in die Entwicklung von $\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2$ ein, so kommt

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 9 + \frac{27\beta}{2^7}[F^2 - 4qF + 32q^2] + [\beta^2], \quad q > 0, \tag{38}$$

was sich umformen läßt in

$$\left(\frac{\Omega}{3\omega_0}\right)^2 - \frac{3\beta}{4}\left(q - \frac{F}{16}\right)^2 = 1 + \frac{21\beta}{2^{10}}F^2. \tag{39}$$

Diese Gleichung stellt eine Hyperbel dar, deren Scheitel bei $q = F/16$ liegt und die Ω-Achse bei $\Omega = 3\omega_0$ schneidet. Die Verzweigung tritt für $A = 0$ ein. Hier gibt unsere jetzige Lösung

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 &= 9\left(1 + \frac{3\beta}{2^7}F^2 + \cdots\right), \\ q &= -\left(\frac{F}{8} - \frac{51\beta}{2^{14}}F^3\right)\sin 3\tau = -\left(\frac{F}{8} - \frac{51\beta}{2^{14}}F^3\right)\sin\left(3\sqrt{1 + \frac{3\beta F^2}{2^7}}\,t\right), \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

während die Grundlösung mit

$$A^* = -\frac{F}{8} + \frac{51\beta}{2^{14}}F^3 = -\frac{F}{8}\left(1 - \frac{51\beta}{2^{11}}F^2\right) \tag{41}$$

für die Frequenz liefert

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{F}{A^*} + \frac{3}{4}\beta A^{*2} = 1 + 8\left(1 + \frac{51\beta}{2^{11}}F^2\right) + \frac{3\beta}{4}\cdot\frac{F^2}{64} = 9\left(1 + \frac{3\beta}{2^7}F^2\right) \tag{42}$$

und für die Amplitude

$$q = A^* \sin\tau = A^* \sin\left(3\sqrt{1 + \frac{3\beta}{2^7}F^2}\,t\right). \tag{43}$$

Die Gleichungen (42) und (43) stimmen also jeweils mit (40) überein. Übrigens gibt es, worauf hier nur kurz hingewiesen werden soll, noch zwei weitere Subharmonische der Ordnung 1/3, die aber bis auf eine Phasenverschiebung von $\pm 2\pi/3$ mit der hier behandelten übereinstimmen.

5. Die Verzweigung bei $\Omega \approx \omega_0/2$. Die Rechnung verläuft prinzipiell genau so wie im letzten Abschnitt. Man muß nur in der *Fourier*-Entwicklung der Amplitude jetzt alle Glieder, also auch die mit geradem n mitnehmen, also ansetzen:

$$q = \Theta_1 \sin\tau + \Theta_2 \sin 2\tau + \cdots. \tag{44}$$

Endliche Terme enthalten Θ_1 und Θ_2, Terme erster Ordnung die folgenden Glieder bis $n = 6$. Als freien Parameter wählen wir Θ_2 und setzen es gleich B. Dann liefert die übliche Rechnung für

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= \frac{4}{3}F - \frac{\beta F}{3}\left[7B^2 + 2\left(\frac{4F}{3}\right)^2\right] + [\beta^2], \\ \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 &= \frac{1}{4} + \frac{3\beta}{16}\left[B^2 + 2\left(\frac{4F}{3}\right)^2\right] + [\beta^2]. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Im Verzweigungspunkt ist $B = 0$, also erhalten wir die Amplitude

$$A^* = \frac{4}{3}F\left(1 - \frac{\beta}{2}\left(\frac{4F}{3}\right)^2\right) + \cdots \tag{46}$$

und die Frequenz

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3\beta}{8}\left(\frac{4F}{3}\right)^2 + \cdots. \tag{47}$$

Setzen wir A^* als Wert von A in (13) ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}\left[1 + \frac{\beta}{2}\left(\frac{4F}{3}\right)^2\right] + \frac{3}{4}\beta\left(\frac{4F}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3\beta}{8}\left(\frac{4F}{3}\right)^2, \tag{48}$$

was mit (47) übereinstimmt.

6. Die Verzweigung bei $\Omega = 3/2\,\omega_0$. Um zum Schluß noch zu zeigen, daß man für jeden rationalen Wert von $\Omega : \omega_0$ eine Verzweigung berechnen kann, daß also prinzipiell die Verzweigungspunkte auf der Grundlösung für die Response-Kurve überall dicht liegen, wollen wir hier den für solche Verzweigungen einfachsten, aber typischen Fall soweit durchrechnen, daß der in diesen Fällen einzuschlagende Weg klar zu übersehen ist. Wir wählen dazu $\Omega = 3/2\,\omega_0$ und setzen an

$$\left.\begin{aligned} q &= \Theta_1 \sin\frac{\tau}{2} + \Theta_2 \sin\tau + \Theta_3 \sin\frac{3}{2}\tau + \cdots + \Theta_9 \sin\frac{9}{2}\tau + \cdots, \\ 1 + \varkappa &= 1 + \varkappa_0 + \varkappa_1 \beta + \cdots, \qquad \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 (1 + \varkappa). \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Dabei werden, wie man aus dem Glied βq^3 in der üblichen Weise erkennt, für die Verzweigungslösung Θ_2 und Θ_3 endlich, während Θ_1 und Θ_4 bis Θ_9 außer Θ_5 von der Ordnung β ausfallen; Θ_5 und alle übrigen Θ_i werden mindestens von der Ordnung β^2. Um aber den Vergleich mit der Rechnung für die Subharmonische der Ordnung 1/3 leicht durchführen zu können, geben wir in q^3 auch noch die Glieder an, die für ein endliches Θ_1 ebenfalls endlich würden. Setzen wir also (endliche Terme sind unterstrichen)

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= 3\,(\Theta_1^3 + 2\,\Theta_1\,\Theta_2^2 - \Theta_1^2\,\Theta_3 + \underline{\Theta_2^2\,\Theta_3} + 2\,\Theta_1\,\Theta_3^2 + \cdots), \\ Q_2 &= 3\,(2\,\Theta_1^2\,\Theta_2 + \underline{\Theta_2^3} + 2\,\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3 + 2\,\underline{\Theta_2\,\Theta_3^2} + \cdots), \\ Q_3 &= -\,\Theta_1^3 + 3\,(\Theta_1\,\Theta_2^2 + 2\,\Theta_1^2\,\Theta_3 + 2\,\underline{\Theta_2^2\,\Theta_3} + \underline{\Theta_3^3} + \cdots), \\ Q_4 &= 3\,(-\,\Theta_1^2\,\Theta_2 + 2\,\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3 + \underline{\Theta_2\,\Theta_3^2} + \cdots), \\ Q_5 &= 3\,(-\,\Theta_1\,\Theta_2^2 - \Theta_1^2\,\Theta_3 + \Theta_1\,\Theta_3^2 + \cdots), \qquad Q_6 = -\,\underline{\Theta_2^3} - 6\,\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3 + \cdots, \\ Q_7 &= -\,3\,(\underline{\Theta_2^2}\,\Theta_3 + \Theta_1\,\Theta_3^2 + \cdots), \quad Q_8 = -\,3\,\underline{\Theta_2\,\Theta_3^2} + \cdots, \quad Q_9 = -\,\underline{\Theta_3^3} + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

so erhalten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1+\varkappa}{4}\Theta_1 + \Theta_1 + \frac{\beta}{4}Q_1 &= 0, \\ -(1+\varkappa)\,\Theta_2 + \Theta_2 + \frac{\beta}{4}Q_2 &= 0, \\ -\frac{9}{4}(1+\varkappa)\,\Theta_3 + \Theta_3 + \frac{\beta}{4}Q_3 &= F, \\ -4\,(1+\varkappa)\,\Theta_4 + \Theta_4 + \frac{\beta}{4}Q_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

usw.

Als Glieder nullter Ordnung in β folgen nunmehr

$$\left.\begin{aligned} -(1+\varkappa_0)\,\vartheta_{20} + \vartheta_{20} &= 0, \qquad \text{also} \qquad \varkappa_0\,\vartheta_{20} = 0, \\ -\frac{9}{4}(1+\varkappa_0)\,\vartheta_{30} + \vartheta_{30} &= \mathrm{F}. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Würden wir hier $\vartheta_{20} = 0$ setzen, so würden in unserem Ansatz alle Θ_{2i} identisch verschwinden und wir damit auf die Gleichungen für die Subharmonische der Ordnung 1/3 zurückkommen; denn man braucht ja nur statt $\tau/2$ wieder τ zu schreiben, und für $(\Omega/\omega_0)^2$ statt $(3/2)^2\,(1+\varkappa)$ den Wert $9\,(1+\varkappa)$ zu setzen, so sieht man, daß beide Ansätze identisch sind. Also muß man die andere Initiative wählen und setzen

$$\varkappa_0 = 0, \qquad \vartheta_{20} = B, \tag{53}$$

wobei wir B wiederum als den freien Parameter benutzen. Die weitere Rechnung verläuft nun völlig analog zu den Rechnungen der vorigen Abschnitte. Um die Verzweigung sauber auszurechnen, braucht man die Koeffizienten ϑ_{11} und ϑ_{31}. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{30} &= -\frac{4}{5}F, \qquad \vartheta_{11} = -\,B^2\,\vartheta_{30}, \\ \vartheta_{31} &= -\frac{3}{20}\,\vartheta_{30}\,(B^2 + 14\,\vartheta_{30}^2), \qquad \varkappa_1 = \frac{3}{4}\,(B^2 + 2\,\vartheta_{30}^2). \end{aligned}\right\}$$

Um $\varkappa_2$ zu berechnen, würde man noch ϑ_{51} und ϑ_{71} benötigen; aber um den Charakter der Verzweigung zu erkennen, genügt bereits die Kenntnis von $\varkappa_1$. Es gilt also

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 &= \frac{9}{4}\left[1+\frac{3}{4}\beta\left(B^2+2\left(\frac{4F}{5}\right)^2\right)\right],\\ q &= \beta\,\vartheta_{11}\sin\frac{\tau}{2}+B\sin\tau+(\vartheta_{30}+\beta\,\vartheta_{31})\sin\frac{3\tau}{2}+[\beta],\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

also die Amplitude

$$q \approx B \qquad \text{für große } B, \tag{56}$$

also die Amplituden–Frequenz-Relation

$$\left(\frac{2\,\Omega}{3\,\omega_0}\right)^2 = 1+\frac{3}{4}\beta\left[q^2+2\left(\frac{4F}{5}\right)^2\right], \tag{57}$$

was sich schreiben läßt

$$\left(\frac{2\,\Omega}{3\,\omega_0}\right)^2 - \frac{3}{4}\beta\,q^2 = 1+\frac{3}{2}\beta\left(\frac{4F}{5}\right)^2. \tag{58}$$

Wir erhalten somit die übliche Hyperbel, rechts von der kritischen Stelle $\Omega = 3/2\,\omega_0$. Die Verzweigung tritt ein für $B = 0$, wo unsere jetzige Lösung liefert

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{9}{4}\left[1+\frac{3}{2}\beta\left(\frac{4F}{5}\right)^2+\cdots\right]. \tag{59}$$

Für die Amplitude erhalten wir in diesem Falle einschließlich der Terme in β

$$q = \vartheta_{30}\left(1-\frac{21}{10}\beta\,\vartheta_{30}^2\right). \tag{60}$$

Setzen wir diesen Wert für A in die Formel (13) unserer Grundlösung ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}A &= -\frac{4}{5}F\left[1-\frac{21}{10}\beta\left(\frac{4F}{3}\right)^2\right],\\ \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 &= 1+\frac{5}{4}\left[1+\frac{21}{10}\beta\left(\frac{4F}{3}\right)^2\right]+\frac{3}{4}\beta\left(\frac{4F}{5}\right)^2+\cdots,\\ &= \frac{9}{4}+\beta\left(\frac{4F}{5}\right)^2\left(\frac{21}{8}+\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4}\left[1+\frac{3}{2}\beta\left(\frac{4F}{5}\right)^2+\cdots\right],\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

was offensichtlich mit (59) übereinstimmt.

II. Die Grundlösung bei zwei Freiheitsgraden. 7. Die Response-Kurven für $\beta = 0$. Wir wollen in diesem Abschnitt den allgemeinen Charakter der Grundlösung für das gleiche System von zwei Freiheitsgraden untersuchen, dessen freie Schwingungen in I behandelt wurden. Wir legen also das durch eine äußere Kraft modifizierte System I, (1) zugrunde:

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{\vartheta}+\alpha^2\ddot{\varphi}+\omega_0^2\,\vartheta+\beta\,\omega_0^2\,\vartheta^3 = F\,\omega_0^2\sin\Omega\,t,\\ &\ddot{\vartheta}+\ddot{\varphi}+\omega_0^2\,\varphi+\beta\,\omega_0^2\,\varphi^3 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Wir wollen aber die Grundlösung für dies System nicht soweit durchrechnen, wie wir es im ersten Abschnitt für die *Duffing*-Differentialgleichung getan haben, sondern uns jeweils auf die ersten Glieder beschränken, aus denen man dann in Analogie zu einem Freiheitsgrad Schlüsse über die Konvergenzgrenzen ziehen kann. Alles Wesentliche kann man schon aus der Responsekurve für kleine Schwingungen erkennen, die wir jetzt zunächst bestimmen wollen. Für unseren allgemeinen Ansatz [vgl. I, (6) und (7)] sind das die Glieder der Ordnung β^0. Setzen wir wieder

$$\tau = \omega_0\,t\sqrt{1+\varkappa}, \qquad \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 1+\varkappa, \tag{63}$$

dann wird aus (62)

$$\left.\begin{aligned}&(1+\varkappa)\,(\vartheta''+\alpha^2\varphi'')+\vartheta+\beta\,\vartheta^3 = F\sin\tau,\\ &(1+\varkappa)\,(\vartheta''+\varphi'')+\varphi+\beta\,\varphi^3 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Mit

$$1+\varkappa = 1+\varkappa_0+\varkappa_1\beta+\cdots \tag{65}$$

erhalten wir dann für die Glieder der Ordnung β^0

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_0\,\vartheta_{10} + \alpha^2\,(1+\varkappa_0)\,A + F &= 0\,, \\ (1+\varkappa_0)\,\vartheta_{10} + \varkappa_0\,A &= 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

mit den Lösungen

$$A = \frac{F\,(1+\varkappa_0)}{\varkappa_0^2 - \alpha^2\,(1+\varkappa_0)^2}\,, \qquad \vartheta_{10} = -\frac{\varkappa_0}{1+\varkappa_0}\,A = -\frac{F\,\varkappa_0}{\varkappa_0^2 - \alpha^2\,(1+\varkappa_0)^2}\,. \tag{67}$$

Der Nenner verschwindet für die beiden Eigenfrequenzen

$$1+\varkappa_{01} = \frac{1}{1+\alpha}\,, \qquad 1+\varkappa_{02} = \frac{1}{1-\alpha}\,. \tag{68}$$

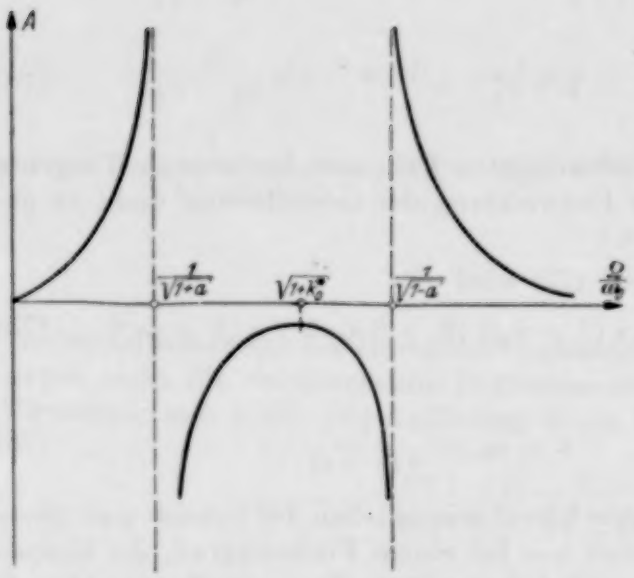


Abb. 1. Der Verlauf der Amplitude A als Funktion von $\Omega : \omega_0$.

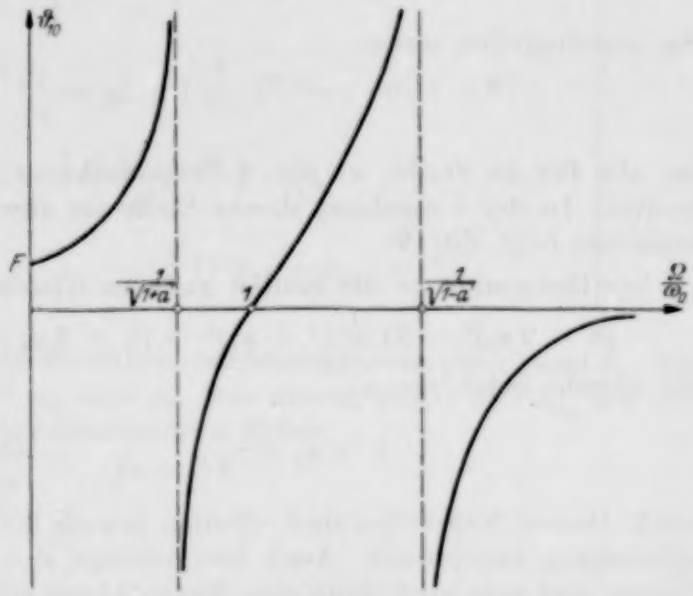


Abb. 2. Der Verlauf der Amplitude ϑ_{10} als Funktion von $\Omega : \omega_0$.

Der Verlauf von A und ϑ_{10} über Ω/ω_0 ist in Abb. 1 und 2 aufgetragen, aus denen wir für das folgende entnehmen, daß zwischen den beiden Eigenfrequenzen A negativ, außerhalb dieses Bereiches positiv ausfällt, und daß das Minimum von $|A|$ für

$$1+\varkappa_0^* = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \tag{69}$$

erreicht wird. Da wir aber für die Responsekurve im nichtlinearen Fall $1+\varkappa$ als Funktion von A benötigen, eliminieren wir aus (66) ϑ_{10} und lösen nach $1+\varkappa_0$ auf. Wir erhalten

$$1+\varkappa_0 = \frac{1}{1-\alpha^2}\left[1 + \frac{F}{2A} \pm \sqrt{\left(1+\frac{F}{2A}\right)^2 - 1 + \alpha^2}\;\right]. \tag{70}$$

Das Plus-Zeichen vor der Wurzel bestimmt den Bereich, in dem $\varkappa_0 > \varkappa_0^*$ ist, also wesentlich die Umgebung der Resonanz bei der Oberschwingung, das Minuszeichen, für das also $\varkappa_0 < \varkappa_0^*$ gilt, liefert den Bereich in der Umgebung der Resonanz der Grundschwindung. Der Wert $\varkappa_0^*$ korrespondiert dem Minimum von $|A|$, also

$$1+\varkappa_0^* = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,, \quad A_{min} = -\frac{F}{2\,(1-\sqrt{1-\alpha^2})} \quad \text{wegen} \quad 1 + \frac{F}{2\,A_{min}} = +\sqrt{1-\alpha^2}\,. \tag{71}$$

8. Die Grundlösung im nichtlinearen Fall. Wir bestimmen jetzt mit der gleichen Methode wie im ersten Abschnitt und in I die Anfangsglieder der Grundlösung soweit, wie wir sie brauchen, um die Konvergenzgrenzen dieser Entwicklung festzustellen. Wegen der weitgehenden Analogie zu dem Falle eines Freiheitsgrades genügen dafür schon die Anfangsglieder. Die Bestim-

mungsgleichungen für die Koeffizienten proportional β werden

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_0\,\vartheta_{11} + \varkappa_1 A\left(\alpha^2 - \frac{\varkappa_0}{1+\varkappa_0}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{\varkappa_0}{1+\varkappa_0}\right)^3 A^3 &= 0\,, \\ (1+\varkappa_0)\,\vartheta_{11} + \frac{\varkappa_1 A}{1+\varkappa_0} - \frac{3}{4}A^3 &= 0\,, \\ (8+9\varkappa_0)\,\vartheta_{31} + 9\alpha^2(1+\varkappa_0)\,\varphi_{31} - \frac{1}{4}\left(\frac{\varkappa_0}{1+\varkappa_0}\right)^3 A^3 &= 0\,, \\ 9(1+\varkappa_0)\,\vartheta_{31} + (8+9\varkappa_0)\,\varphi_{31} + \frac{1}{4}A^3 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Die Determinante der beiden ersten Gleichungen wird

$$\frac{\varkappa_0}{1+\varkappa_0} - \alpha^2(1+\varkappa_0) + \varkappa_0 = \frac{1}{1+\varkappa_0}\left[\varkappa_0(2+\varkappa_0) - \alpha^2(1+\varkappa_0)^2\right]. \tag{73}$$

Sie verschwindet, wenn

$$1+\varkappa_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = 1+\varkappa_0^* \tag{74}$$

ist, also für die Stelle, wo die A-Responsekurve im linearisierten Falle eine horizontale Tangente besitzt. In der Umgebung dieser Stelle ist also die Entwicklung der Grundlösung nicht zu gebrauchen (vgl. Ziff. 9).

Die Determinante der beiden anderen Gleichungen (72) wird

$$(8+9\varkappa_0)^2 - 81\alpha^2(1+\varkappa_0)^2 = [8+9\varkappa_0 - 9\alpha(1+\varkappa_0)]\,[8+9\varkappa_0+9\alpha(1+\varkappa_0)]\,. \tag{75}$$

Sie verschwindet, wenn

$$1+\varkappa_0 = \frac{1}{9(1+\alpha)} \qquad \text{oder} \qquad 1+\varkappa_0 = \frac{1}{9(1-\alpha)} \tag{76}$$

wird. Diesen Nullstellen sind offenbar jeweils die ersten Ultraharmonischen der Grund- und Oberschwingung zugeordnet. Auch hier versagt also, genau wie bei einem Freiheitsgrad, die Grundlösung, und man muß dann eine Entwicklung ansetzen, bei der endliche Terme in Φ_3 und Θ_3 auftreten (vgl. Ziff. **10**). Wir geben hier gleich noch die Werte von A und ϑ_{10} für diese Fälle an. Es gilt

$$\left.\begin{aligned} 1+\varkappa_0 &= \frac{1}{9(1+\alpha)}\,, & A &= \frac{9}{16}\frac{F}{4+5\alpha}\,, & \vartheta_{10} &= \frac{9}{16}\cdot\frac{8+9\alpha}{4+5\alpha}F\,, \\ 1+\varkappa_0 &= \frac{1}{9(1-\alpha)}\,, & A &= \frac{9}{16}\frac{F}{4-5\alpha}\,, & \vartheta_{10} &= \frac{9}{16}\cdot\frac{8-9\alpha}{4-5\alpha}F\,. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Aus den letzten Werten sieht man, daß die Berechnung der Ultraharmonischen zur Oberschwingung für $\alpha = 4/5$ in der üblichen Weise nicht möglich ist. Mit diesem Ausnahmefall beschäftigen wir uns ausführlich im dritten Abschnitt.

Solange $\alpha < 40/41$ ist, liegt $1/9\,(1-\alpha)$ und erst recht $1/9\,(1+\alpha)$ links von $1+\varkappa_0^*$, so daß für solche Werte von α unsere Grundlösung sicher konvergent — für hinreichend kleine β — ist, wenn

$$(1+\varkappa_0) - (1+\varkappa_0^*) \equiv \varkappa_0 - \varkappa_0^* \gg \beta\,; \tag{78}$$

hingegen hört, von der Stelle $\varkappa^*$ abgesehen, die Konvergenz jeweils in der Umgebung der Ultraharmonischen, also für

$$1+\varkappa_0 = \frac{1}{(1+\alpha)(2n+1)^2}\,, \qquad 1+\varkappa_0 = \frac{1}{(1-\alpha)(2n+1)^2} \tag{79}$$

sicher auf.

9. Die Entwicklung in der Umgebung von $\varkappa_0^*$. Wegen des Verschwindens der Determinante (73) muß an dieser Stelle eine Sonderentwicklung in der folgenden Form angesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 1+\varkappa &= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \varkappa_1\beta + \cdots\,, \\ \Theta_1 &= \frac{F}{2} + \vartheta_{11}\beta\,, \qquad \Phi_1 = -\frac{F}{2\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)} + \varphi_{11}\beta + \cdots\,, \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

wobei jetzt ϑ_{11} die Rolle des freien Parameters übernehmen muß. Man erhält hier für die Glieder proportional β bzw. β^2 die folgenden Relationen:

$$
\left.\begin{aligned}
&[\beta^1]: \begin{cases} \vartheta_{11}\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)+\alpha^2\varphi_{11}-\frac{\varkappa_1 F}{2}(1-\alpha^2)-\frac{3}{4}\left(\frac{F}{2}\right)^3\sqrt{1-\alpha^2}=0\,, \\ \vartheta_{11}+\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)\varphi_{11}-\frac{\varkappa_1 F}{2\alpha^2}(1-\alpha^2)\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right) \\ \qquad\qquad +\frac{3}{4}\left(\frac{F}{2}\right)^3\sqrt{1-\alpha^2}\,\frac{1}{(1-\sqrt{1-\alpha^2})^3}=0\,, \end{cases} \\
&[\beta^2]: -\frac{9}{\sqrt{1-\alpha^2}}(\vartheta_{31}+\alpha^2\varphi_{31})+\vartheta_{31}-\frac{1}{4}\left(\frac{F}{2}\right)^3=0\,, \\
&\qquad -\frac{9}{\sqrt{1-\alpha^2}}(\vartheta_{31}+\varphi_{31})+\varphi_{31}+\frac{1}{4}\left(\frac{F}{2}\right)^3\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^3=0\,, \\
&[\beta^2]: -\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\varphi_{12}-\varkappa_1(\vartheta_{11}+\alpha^2\varphi_{11})+\frac{\varkappa_2 F}{2}\sqrt{1-\alpha^2}+\frac{3F^2}{16}(3\vartheta_{11}-\vartheta_{31})=0\,, \\
&\qquad -\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\varphi_{12}-\varkappa_1(\vartheta_{11}+\varphi_{11})-\frac{\varkappa_2 F}{2}\left(1-\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^2}\right)+\varphi_{12} \\
&\qquad\qquad -\frac{3F^2}{16}\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2(3\varphi_{11}+\varphi_{31})=0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{81}
$$

In den beiden ersten Gleichungen verschwindet die Koeffizientendeterminante von $\varkappa_1$ und ϑ_{11}, hingegen nicht die entsprechende Determinante zu φ_{11} und $\varkappa_1$, was erneut zeigt, daß ϑ_{11} der freie Parameter sein muß. Die Auflösung dieser beiden Gleichungen liefert

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_{11} &= -\frac{3F^3}{64}\,\frac{1-(1-\sqrt{1-\alpha^2})^2}{(1-\sqrt{1-\alpha^2})^3}\,, \\
\varkappa_1 &= \frac{2\vartheta_{11}}{F}\cdot\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha^2}+\frac{3}{32}\,\frac{F^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,\frac{5-\alpha^2-3\sqrt{1-\alpha^2}}{(1-\sqrt{1-\alpha^2})^2}\,;
\end{aligned}\right\} \tag{82}
$$

φ_{11} hängt also bemerkenswerter Weise nicht von ϑ_{11} ab. Ein Blick auf die restlichen vier Gleichungen (81) zeigt, daß φ_{12} von $\varkappa_1$ ϑ_{11} und damit nach (82) quadratisch von ϑ_{11} abhängt. Bestimmt man ϑ_{11}^* aus der Relation $d\varphi_{12}/d\vartheta_{11}=0$ und trägt diesen Wert in (82) ein, so bekommt man bis auf Terme in β^2 die Koordinaten des Punktes in der (A,Ω)-Ebene, wo die A-Responsekurve im nichtlinearen Fall eine horizontale Tangente besitzt. Da aber φ_{11} unabhängig von ϑ_{11} ist, können wir den Wert von A, für den die Konvergenz der Grundlösung für $\varkappa_0\approx\varkappa_0^*$ aufhört, auch ohne diese Rechnung bis auf Terme in β^2 angeben:

$$
-A_{min}=\frac{F}{2(1-\sqrt{1-\alpha^2})}+\frac{3\beta F^3}{64}\,\frac{1-(1-\sqrt{1-\alpha^2})^2}{(1-\sqrt{1-\alpha^2})^3}\,. \tag{83}
$$

Unsere jetzige Entwicklung ist aber auch noch für endliche, sogar große ϑ_{11} brauchbar, so daß sich die Konvergenzbereiche dieser Entwicklung und der Grundlösung überdecken. In dem Überdeckungsbereich stellen beide Entwicklungen nur Umordnungen voneinander dar, was man in der gleichen Weise zeigen kann, wie das bei der Diskussion der *Duffing*-Differentialgleichung in Ziff. 3 gezeigt wurde. Wir können daher hier auf einen solchen expliziten Nachweis verzichten, zumal das ja aus bekannten Sätzen der Reihenlehre unmittelbar folgt.

10. Die Lösung für die Ultraharmonische zur Oberschwingung. Man könnte nun, ebenso wie bei einem Freiheitsgrad, die Verzweigungen der Grundlösung für die beiden Klassen von Subharmonischen zur Grundschwingung einerseits, zur Oberschwingung andererseits, berechnen, ebenso zeigen, daß solche Verzweigungen auch schon dann auftreten, wenn die Frequenz der äußeren Kraft zu einer der beiden Eigenfrequenzen in rationalem Verhältnis steht. Aber da bei solchen Untersuchungen prinzipiell nichts Neues gegenüber einem Freiheitsgrad herauskommt, wollen wir darauf verzichten. Nur auf die erste Ultraharmonische zur Ober-

schwingung wollen wir noch kurz eingehen, um das in solchen Fällen einzuschlagende Verfahren zu skizzieren. Wir setzen dazu an ($\alpha \neq 4/5$)

$$\left.\begin{aligned} &1 + \varkappa_0 = \frac{1}{9(1-\alpha)} + \varkappa_1 \beta + \cdots, \\ &\Phi_1 = \varphi_{10} + \varphi_{11}\beta + \cdots, \qquad \Theta_1 = \vartheta_{10} + \vartheta_{11}\beta + \cdots \qquad (\varphi_{10}, \vartheta_{10} \quad \text{aus} \quad (77)), \\ &\Phi_3 = \varphi_{30}, \qquad \Theta_3 = \vartheta_{30} + \beta\,\vartheta_{31} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

und verwenden φ_{30} als freien Parameter. Die Glieder der Ordnung β^0 liefern die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{9(1-\alpha)}(\vartheta_{10} + \alpha^2\varphi_{10}) + \vartheta_{10} = F, \qquad -\frac{1}{9(1-\alpha)}(\vartheta_{10} + \varphi_{10}) + \varphi_{10} = 0, \\ &\vartheta_{30}\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}\right) - \frac{\alpha^2\varphi_{30}}{1-\alpha} = 0, \qquad \varphi_{30}\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}\right) - \frac{\vartheta_{30}}{1-\alpha} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

von denen die beiden ersten natürlich identisch erfüllt sind, während die beiden letzten übereinstimmend ergeben

$$\vartheta_{30} = -\alpha\varphi_{30}. \tag{86}$$

Von den Gleichungen der Ordnung β geben wir nur noch die beiden an, aus denen $\varkappa_1$ und ϑ_{31} berechnet werden können:

$$\left.\begin{aligned} &-\alpha\vartheta_{31} + 9\alpha\varphi_{30}(1-\alpha)^2\varkappa_1 - \frac{1-\alpha}{4}(\vartheta_{10}^3 + 6\alpha\varphi_{30}\vartheta_{10}^2 + 3\alpha^3\varphi_{30}^3) = 0, \\ &\alpha\vartheta_{31} + 9\alpha\varphi_{30}(1-\alpha)^2\varkappa_1 - \frac{\alpha(1-\alpha)}{4}(-\varphi_{10}^3 + 6\varphi_{30}\varphi_{10}^2 + 3\varphi_{30}^3) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Man ersieht unmittelbar, daß auch bei den übrigen Koeffizienten keine Komplikationen eintreten und man die so entstehende Entwicklung, die für endliche φ_{30} sicher konvergiert, wiederum wie im ersten Abschnitt bis zu Werten von $\varphi_{30} \approx \sqrt{\beta}$ benutzen kann, und sie damit in den Konvergenzbereich der Grundlösung hineinreicht. Wiederum sind dann beide Entwicklungen nur Umordnungen voneinander, und es ist prinzipiell wieder möglich, aus der Bedingung, daß die Gesamtamplitude stationär wird, auf die Konvergenzgrenze der Grundlösung in der Nähe von $1/9\,(1-\alpha)$ zu schließen (vgl. Ziff. 3).

III. Der Fall $\alpha = 4/5$. 11. Das Verhalten der Lösung in der Nähe der Resonanz der Grundschwingung. Wie schon in der Einleitung bemerkt, verhalten sich die Eigenfrequenzen des Systems (62), wenn $\alpha = 4/5$ ist, für kleine Schwingungen wie 1 : 3, so daß gegenüber dem Normalfall, den wir in II untersucht haben, neue Phänomene zu erwarten sind, die für einen Freiheitsgrad keine Analogie aufweisen. Wir untersuchen in diesem Abschnitt das Verhalten der Lösung in der Umgebung der Resonanz der Grundschwingung, die zugleich der ersten Ultraharmonischen zur Oberschwingung entspricht. Wollen wir auch fernerhin mit endlichen Amplituden der äußeren Kraft arbeiten, so müssen wir unseren Grundansatz I (6) modifizieren; nur, wenn wir die Amplitude der äußeren Kraft proportional β setzen würden, könnten wir diesen alten Ansatz aufrecht erhalten. Da aber in beiden Fällen der Rechenaufwand nicht wesentlich verschieden ist, behalten wir ein endliches F bei und setzen an

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^2 = \frac{16}{25} + \xi\beta^{1/3}, \qquad 1 + \varkappa = \frac{5}{9} + \varkappa_1\beta^{1/3} + \varkappa_2\beta^{2/3} + \cdots, \\ &\Phi_1 = A\beta^{-1/3}, \qquad \Theta_1 = B\beta^{-1/3} + \vartheta_{11} + \vartheta_{12}\beta^{1/3} + \cdots, \\ &\Phi_3 = \varphi_{30}\beta^{-1/3} + \varphi_{31} + \varphi_{32}\beta^{1/3} + \cdots, \qquad \Theta_3 = \vartheta_{30}\beta^{-1/3} + \vartheta_{31} + \vartheta_{32}\beta^{1/3} + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Die folgenden Φ_i, Θ_i bis hin zu $i = 9$ beginnen dann jeweils mit einem Term endlicher Ordnung, während erst für $i \geqq 11$ die Φ_i, Θ_i mindestens von der Ordnung $\beta^{1/3}$ ausfallen. Dies entnimmt man den Gleichungen (6).

Die Glieder der Ordnung $\beta^{-1/3}$ liefern je zwei übereinstimmende homogene Gleichungen für A, B bzw. für φ_{30}, ϑ_{30} [vgl. I (17)] mit den Lösungen

$$B = \frac{4}{5}A, \qquad \vartheta_{30} = -\frac{4}{5}\varphi_{30}. \tag{89}$$

Der Koeffizientenvergleich der Glieder der Ordnung β^0 liefert dann

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{4}{9}\vartheta_{11} - \frac{36}{25}\varkappa_1 A - \frac{5}{9}\xi A + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^3 (A^3 + A^2\varphi_{30} + 2A\varphi_{30}^2) = F,\\
&\frac{5}{9}\vartheta_{11} + \frac{9}{5}\varkappa_1 A \qquad\qquad + \frac{3}{4}(-A^3 + A^2\varphi_{30} - 2A\varphi_{30}^2) = 0,\\
&5\vartheta_{31} + 4\varphi_{31} = \frac{9}{5}\varkappa_1\varphi_{30} - \frac{25}{4}\xi\varphi_{30} - \frac{4}{25}(A^3 + 6A^2\varphi_{30} + 3\varphi_{30}^3),\\
&5\vartheta_{31} + 4\varphi_{31} = -\frac{9}{5}\varkappa_1\varphi_{30} \qquad\qquad - \frac{1}{4}(A^3 - 6A^2\varphi_{30} - 3\varphi_{30}^3),\\
&-\frac{125}{9}\left(\vartheta_{50} + \frac{16}{25}\varphi_{50}\right) + \vartheta_{50} + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^3 (A^2\varphi_{30} - A\varphi_{30}^2) = 0,\\
&-\frac{125}{9}(\vartheta_{50} + \varphi_{50}) + \varphi_{50} + \frac{3}{4}(-A^2\varphi_{30} + A\varphi_{30}^2) = 0,\\
&-\frac{245}{9}\left(\vartheta_{70} + \frac{16}{25}\varphi_{70}\right) + \vartheta_{70} - \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^3 A\varphi_{30}^2 = 0,\\
&-\frac{245}{9}(\vartheta_{70} + \varphi_{70}) + \varphi_{70} - \frac{3}{4}A\varphi_{30}^2 = 0,\\
&-45\left(\vartheta_{90} + \frac{16}{25}\varphi_{90}\right) + \vartheta_{90} + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^3\varphi_{30}^3 = 0,\\
&-45(\vartheta_{90} + \varphi_{90}) + \varphi_{90} - \frac{1}{4}\varphi_{30}^3 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Die ersten vier Gleichungen stimmen mit den Gleichungen I (19) überein, nur daß bei der ersten dieser Gleichungen jetzt auf der rechten Seite die Amplitude F der äußeren Kraft auftritt.

Eliminiert man aus den beiden ersten Gleichungen ϑ_{11} und setzt $\varphi_{30} = A\,x$, so folgt

$$\varkappa_1 = -\frac{5^3}{9^2\cdot 2^3}\xi + \frac{A^2}{120}(82\,x^2 - 9\,x + 41) - \frac{25}{72}\frac{F}{A}. \tag{91}$$

Setzt man diesen Wert von $\varkappa_1$ in die dritte und vierte Gleichung ein, so erhält man durch die gleiche Schlußweise wie in I für x die Gleichung dritten Grades

$$g(x) \equiv 41\,x^3 - 9\,x^2 - 41\,x - \frac{2\cdot 5^5}{3^3}\frac{\xi}{A^2}x - \frac{5^3}{3}\frac{F}{A^3}x + 3 = 0, \tag{92}$$

die mit der Abkürzung

$$\xi + \frac{9}{50}\frac{F}{A} = \xi_1 \tag{93}$$

direkt in die Gleichung I (20) mit ξ_1 an Stelle von ξ übergeht, so daß wir alle in I für diese Gleichung gewonnenen numerischen Resultate unmittelbar auf den jetzigen Fall übertragen können. Die numerischen Rechungen wollen wir hier nur für den Fall $\xi = 0$ durchführen, möchten aber darauf hinweisen, daß die gleichen Anomalien in ähnlicher Form natürlich auch für solche Werte von α auftreten, die in einem Streifen von der Größenordnung $\sqrt[3]{\beta}$ um $\alpha = 4/5$ herum liegen.

Unser Ziel ist zunächst, einen Überblick über die Abhängigkeit des Parameters A von der Frequenz Ω zu gewinnen, also die A-Responsekurve in der Umgebung der Grundfrequenz aufzustellen. Diese A-Responsekurve ist natürlich noch nicht die übliche Responsekurve, da ja die Amplituden der Glieder $\sin\tau$ und $\sin 3\tau$ hier von gleicher Größenordnung sind, und die maximale Amplitude aus diesen beiden Amplituden zusammengesetzt werden muß, um die wirkliche Responsekurve zu erhalten.

Dazu berechnen wir zunächst die Skelette der A-Responsekurve, die für $\xi = F = 0$ aus der Gleichung

$$f(x) \equiv 41\,x^3 - 9\,x^2 - 41\,x + 3 = 0 \tag{94}$$

folgen. Die Wurzeln dieser Gleichung werden

$$x_1^* = +\,0{,}072400\,, \qquad x_2^* = +\,1{,}081551\,, \qquad x_3^* = -\,0{,}934442\,. \tag{95}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$A(x) = \frac{1}{120}(82\,x^2 - 9\,x + 41)\,, \tag{96}$$

so wird

$$A(x_1^*) = 0{,}33982\,, \qquad A(x_2^*) = 1{,}05989\,, \qquad A(x_3^*) = 1{,}00842\,. \tag{97}$$

Tragen wir diese Werte in (91) ein, so erhalten wir wegen

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + \varkappa = \frac{5}{9} + \varkappa_1 \sqrt[3]{\beta} \tag{98}$$

für diese Skelette drei Hyperbeln, zu denen auch gleich noch die Gleichungen ihrer Asymptoten angegeben sind:

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } x_1^*\text{:} && \frac{9}{5}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - 0{,}61167\sqrt[3]{\beta}\cdot A^2 = 1\,, && A\,\beta^{1/6} = 1{,}71545\,\frac{\Omega}{\omega_0}\,,\\ &\text{für } x_2^*\text{:} && \frac{9}{5}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - 1{,}90780\sqrt[3]{\beta}\cdot A^2 = 1\,, && A\,\beta^{1/6} = 0{,}97134\,\frac{\Omega}{\omega_0}\,,\\ &\text{für } x_3^*\text{:} && \frac{9}{5}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - 1{,}81516\sqrt[3]{\beta}\cdot A^2 = 1\,, && A\,\beta^{1/6} = 0{,}99582\,\frac{\Omega}{\omega_0}\,. \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

Für große Beträge von A, also kleine Werte von $\left|\frac{F}{A^3}\right|$ erhalten wir mit

$$\lambda = \frac{125}{3}\,\frac{F}{A^3} \tag{100}$$

für die Wurzeln der Gleichung (92)

$$g(x) = f(x) - \lambda\,x = 0 \tag{101}$$

in erster Näherung

$$x_i = x_i^*\left[1 + \frac{\lambda}{f'(x_i^*) - \lambda}\right] \approx x_i^*\left[1 + \frac{\lambda}{f'(x_i^*)}\right], \tag{102}$$

da die Werte von $f'(x_i^*)$ sehr groß werden:

$$f'(x_1^*) = -41{,}658\,, \qquad f'(x_2^*) = +83{,}41\,, \qquad f'(x_3^*) = +83{,}21\,. \tag{103}$$

Weiter wird

$$A(x_i) = A(x_i^*) + \lambda\,x_i^*\,\frac{A'(x_i^*)}{f'(x_i^*)} \tag{104}$$

und hieraus

$$\varkappa_1 = A^2\,A(x_i^*) + \frac{F}{A}\left[\frac{125}{3}\,\frac{x_i^*\,A'(x_i^*)}{f'(x_i^*)} - \frac{25}{72}\right]. \tag{105}$$

Schätzt man die eckige Klammer ab, so zeigt sich, daß sie für x_1^* negativ, für x_2^* und x_3^* hingegen positiv ausfällt. Also verläuft für große positive A die A-Responsekurve bei dem zu x_1^* gehörigen Skelett links von der Hyperbel, für die beiden anderen Skelette rechts davon; für große negative A ist es gerade umgekehrt. Damit ist der Verlauf für große Beträge von A bekannt. Die beiden positiven Wurzeln der Gleichung (92) für $\xi = 0$ fallen in eine Doppelwurzel zusammen, wenn [vgl. I, (26)]

$$\xi_1 = \frac{9}{50}\,\frac{F}{A} = -0{,}13224\,A^2\,, \qquad \frac{F}{A_{kr}^3} = -0{,}73467 \tag{106}$$

ist. Für $F/A^3 > -0{,}735$ besitzt (92) drei reelle Wurzeln, für $F/A^3 < -0{,}735$ nur noch eine, die negativ ausfällt. Demnach besitzt für $F/A^3 > -0{,}735$ die A-Responsekurve drei Äste, unterhalb dieser Schranke hingegen nur noch einen. Umgekehrt: für positive A gibt es drei Äste, für negative A und $|A| > |A_{kr}|$ ebenfalls drei, für $|A| < |A_{kr}|$ hingegen nur noch einen. In der (A, Ω)-Ebene tritt daher, wie wir zeigen wollen, für ein bestimmtes negatives A eine Verzweigung auf, die aber für die Lösung selbst keine Verzweigung darstellt, da zu diesem Werte von A verschiedene x und somit verschiedene φ_{30} gehören. Soll ein solcher Verzweigungspunkt existieren, so müssen sich die zu x_2 und x_3 gehörenden Zweige schneiden, also zu einem Tripel A, F, $\varkappa_1$ für x_2 und x_3 gleichzeitig die Gleichung (91) erfüllt sein. Daher müßte gelten

$$82\,x_2^2 - 9\,x_2 = 82\,x_3^2 - 9\,x_3\,, \qquad \text{also} \qquad x_2 + x_3 = \frac{9}{82}\,. \tag{107}$$

Da nach (92)

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{9}{41}\,, \tag{108}$$

so muß $x_1 = 9/82$ sein. Soll aber $x_1 = 9/82$ eine Wurzel von (92) sein, so muß gelten

$$\frac{125}{3}\frac{F}{A^3} = -\frac{41}{3} - \frac{81}{164} = -14{,}160569\,, \qquad \frac{F}{A^3} = -0{,}339854\,. \tag{109}$$

Es ergibt sich also in der Tat ein negatives A. Wir können aus diesem Resultat zugleich schließen, daß sich die drei Zweige der A-Responsekurve in der oberen Halbebene nicht schneiden.

Für diesen Wert von F/A^3 wird (92)

$$41\,x^3 - 9\,x^2 - 26{,}839431\,x + 3 = 0 \tag{110}$$

mit den Wurzeln

$$x_1 = \frac{9}{82} = +0{,}109756\,, \qquad x_2 = +0{,}873217\,, \qquad x_3 = -0{,}763461\,. \tag{111}$$

Man sieht leicht, daß der Wert von $\varkappa_1$, der zu x_1 gehört, kleiner ist als der Wert von $\varkappa_1$, der zu x_2 und x_3 gehört, also dem Verzweigungspunkt zugeordnet ist.

Es bleibt noch der Verlauf der Responsekurve für kleine Beträge von A, also große Beträge von λ zu diskutieren. Für $A < 0$ hat hier (92) nur eine Wurzel, die in erster Näherung gegeben ist durch

$$x \approx -\frac{9}{125}\frac{|A^3|}{F}\,, \qquad \varphi_{30} \approx -\frac{9}{125}\frac{A^4}{F}\,, \tag{112}$$

so daß $\varkappa_1$ in der gleichen Annäherung gegeben ist durch

$$\varkappa_1 \approx \frac{F}{|A|}\frac{25}{72} \tag{113}$$

mit zunehmender Frequenz klingen sowohl A wie φ_{30} rasch ab. Ist hingegen $A > 0$, so gibt es drei Wurzeln, eine kleine positive Wurzel x_1, die bis aufs Vorzeichen mit (112) übereinstimmt, und zwei betragsmäßig sehr große Wurzeln, wobei x_2 positiv, x_3 negativ ausfällt. Die Wurzel x_1 liefert das gleiche Ergebnis, wie wir es eben im Falle $A < 0$ festgestellt haben: da sich in (113) ebenfalls das Vorzeichen umkehrt, wird $\varkappa_1$ jetzt zwar negativ, aber mit wachsendem Betrag von $\varkappa_1$ klingen A und φ_{30} ebenfalls rasch ab.

Für die beiden betragsmäßig großen Wurzeln erhält man durch Reihenentwicklung mit $\sigma = 1/\sqrt{\lambda + 41}$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{41}} + \frac{9}{82} + \frac{81}{8\cdot 41\sqrt{41}}\,\sigma + [\sigma^2]\,, \\ x_3 &= -\frac{1}{\sigma\sqrt{41}} + \frac{9}{82} - \frac{81}{8\cdot 41\sqrt{41}}\,\sigma + [\sigma^2]\,. \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

Zu der positiven Wurzel x_2 gehört nach (91)

$$\varkappa_1 = \frac{A^2}{120}\left(\frac{2}{\sigma^2} + \frac{9}{\sigma\sqrt{41}} + 42 - \frac{1}{82}\right) - \frac{F}{A}\cdot\frac{25}{72} + [\sigma]\,. \tag{115}$$

Für die negative Wurzel x_3 hat man nur das Vorzeichen von $\sqrt{41}$ umzukehren. In erster Näherung erhält man daraus für x_2 und x_3 gleichlautend

$$\varkappa_1 = \frac{F}{A}\left(\frac{25}{36} - \frac{25}{72}\right) = \frac{25}{72}\frac{F}{A}\,, \tag{116}$$

so daß also mit unbeschränkt abnehmenden A schließlich $\varkappa_1$ beliebig zunimmt. Da dabei aber auch φ_{30} unbeschränkt zunimmt, so ergibt dieser Ast der A-Responsekurve offenbar asymptotisch die reine Oberschwingung, stellt also die Ultraharmonische dar.

Die Äste der A-Responsekurve, die zu den Wurzeln x_2 und x_3 in der oberen Halbebene gehören, müssen nach dem letzten Ergebnis also ein Minimum von $\varkappa_1$ als Funktion von A aufweisen, das wir näherungsweise aus (115) bestimmen können. Eine einfache, aber längere Rechnung zeigt, daß dies Minimum eintritt, wenn gilt

$$124 - \frac{1}{82} - \frac{125}{6}\zeta + \frac{9}{\sqrt{1 + \frac{125}{123}\zeta}}\left(1 + \frac{125}{12\cdot 41}\zeta\right) = 0\,, \qquad \zeta = \frac{F}{A^3}\,. \tag{117}$$

Diese Gleichung gilt für x_2; für x_3 ergibt sich die entsprechende Gleichung durch Vorzeichenumkehr bei der Quadratwurzel. Die Wurzeln dieser Gleichungen werden näherungsweise

$$\text{für } x_2: \quad \zeta = \frac{F}{A^3} \approx 6{,}4\,, \qquad \text{für } x_3: \quad \zeta = \frac{F}{A^3} \approx 5{,}6\,. \tag{118}$$

Die Ergebnisse aller dieser Rechnungen sind nun in der Abb. 3 als die A-Responsekurve aufgetragen. Auf der horizontalen Achse ist $(\Omega/\omega_0)\beta^{-1/6}$ aufgetragen, so daß die Resonanzstelle der Oberschwingung sehr weit rechts zu denken ist; die Abbildung ist im übrigen rein schematisch, also die drei Skelette, die punktiert eingetragen sind, nicht maßstabgerecht gemäß den Gleichungen (99), sondern so eingezeichnet, daß alles Wesentliche der Kurven klar zu übersehen ist. Da im allgemeinen $\varphi_{30} = A\,x$ von der gleichen Größenordnung wie A ausfällt, zeigt auch die Responsekurve für die Gesamtamplitude im allgemeinen einen gleichen Verlauf, mit einer Ausnahme: auf den Ästen der A-Responsekurve, die sich der Ω-Achse nach rechts hin und von obenher asymptotisch nähern, wächst φ_{30} umgekehrt proportional zu $\sqrt{A}$ an, wird also sehr groß. Diese Äste entsprechen also der Ultraharmonischen, worauf oben schon hingewiesen wurde.

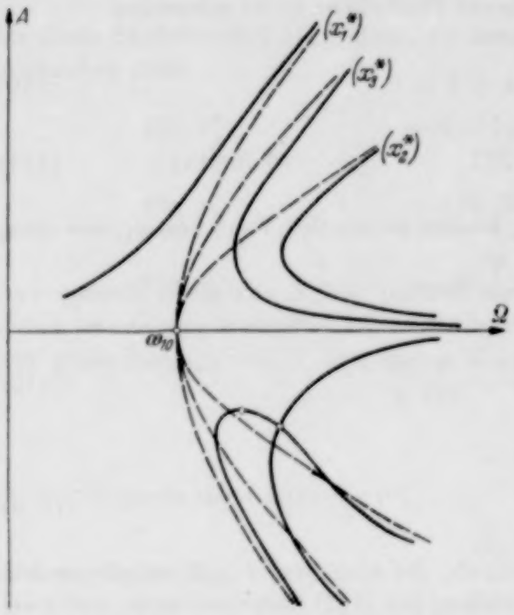


Abb. 3. Die A-Response-Kurve in der Umgebung der Frequenz der Grundschwingung.

Man erkennt aus der Abbildung, daß es rechts von der Eigenfrequenz der Grundschwingung einen Bereich gibt, in dem neun verschiedene mögliche Lösungen unseres Systems (62) existieren, die der gleichen äußeren Kraft zugeordnet sind.

12. Das Verhalten der Lösung in der Nähe der Resonanz der Oberschwingung. Da hier die erste Subharmonische zur Grundschwingung in Resonanz zur Oberschwingung steht, wird, entsprechend zu den Verhältnissen in der Nähe der Grundfrequenz zu erwarten sein, daß dem normalen Verlauf der Responsekurve in der Nähe einer Eigenfrequenz sich eine Subharmonische mit drei Ästen überlagern wird. Ganz entsprechend dem Ansatz in Ziff. 4 machen wir jetzt für die Frequenz den Ansatz

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 9\,(1 + \varkappa)\,. \tag{119}$$

so daß die äußere Kraft gegeben ist durch

$$F \sin 3\,\tau\,. \tag{120}$$

Für Φ_i und Θ_i bleiben die Ansätze (88) erhalten; daher bleibt (89) unverändert und in den Gleichungen (90) ist nur bei der ersten auf der rechten Seite statt F Null zu schreiben, während bei der dritten Gleichung rechts das Glied $-5/4\,F$ hinzukommt. Dies neue System läßt jetzt die Lösung $A = 0$ zu, woraufhin alle Φ_i und Θ_i, deren Index nicht durch drei teilbar ist, verschwinden. Da jetzt φ_{30} die Rolle des freien Parameters übernimmt, folgt aus der dritten und vierten Gleichung (90) sofort

$$\varkappa_1 = \frac{25}{72}\frac{F}{\varphi_{30}} + \frac{41}{120}\varphi_{30}^2 \tag{121}$$

und damit für die Frequenz in erster Näherung

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 5 + \sqrt[3]{\beta}\left(\frac{25}{8}\frac{F}{\varphi_{30}} + \frac{123}{40}\varphi_{30}^2\right). \tag{122}$$

Das ist aber natürlich nichts anderes als das erste Glied der Grundlösung, die ja ebenfalls in unserem Ansatz enthalten sein muß. Für die Subharmonischen muß demnach $A \neq 0$ beibehalten werden. In diesem Falle ergibt die Elimination von ϑ_{11} aus den beiden ersten Gleichungen (90) an Stelle von (91) jetzt, wenn wir gleich $\xi = 0$ setzen,

$$\varkappa_1 = \frac{A^2}{120}(82\,x^2 - 9\,x + 41) = A^2\,A(x)\,. \tag{123}$$

Einsetzen dieses Wertes in die dritte und vierte Gleichung ergibt jetzt mit $\varphi_{30} = A\,x$ für x die Gleichung

$$g(x) \equiv 41\,x^3 - 9\,x^2 - 41\,x + 3 - \frac{125}{3}\frac{F}{A^3} \equiv f(x) - \lambda = 0\,. \tag{124}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Gleichung (92) nur dadurch, daß λ jetzt nicht mehr mit x multipliziert ist. Aber hierdurch wird die Lösungsmannigfaltigkeit grundlegend geändert. Es gibt jetzt zwei Werte von λ, für die (124) Doppelwurzeln besitzt:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -\,16{,}194760\,, \qquad x_{1,2} = +\,0{,}655139\,, \qquad x_3 = -\,1{,}090766\,,\\ \lambda_2 &= +\,16{,}130515\,, \qquad x_{1,2} = -\,0{,}508798\,, \qquad x_3 = +\,1{,}237108\,. \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

In dem Bereich $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ hat (124) jetzt drei reelle Wurzeln, für $\lambda < \lambda_1$ nur eine, und zwar negative Wurzel, für $\lambda > \lambda_2$ ebenfalls nur eine, jetzt aber positive Wurzel. Für große Beträge von A, also für kleine $|\lambda|$ gibt es also drei Subharmonische mit den dazugehörigen Wurzeln von (124)

$$x_i = x_i^* + \frac{\lambda}{f'(x_i^*)}\,, \tag{126}$$

wobei die Werte von x_i^* und $f'(x_i^*)$ aus (95) und (103) zu entnehmen sind. Die zugehörigen Skelette genügen den Gleichungen

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 5 + 9\sqrt[3]{\beta}\;A^2\,\Lambda(x_i^*)\,. \tag{127}$$

also, zusammen mit den Gleichungen der Asymptoten

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } x_1^*\text{:} && \frac{1}{5}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - 0{,}61167\,A^2\sqrt[3]{\beta} = 1\,, && A\,\beta^{1/6} = 0{,}57182\,\frac{\Omega}{\omega_0}\,,\\ &\text{für } x_2^*\text{:} && \frac{1}{5}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - 1{,}90780\,A^2\sqrt[3]{\beta} = 1\,, && A\,\beta^{1/6} = 0{,}32378\,\frac{\Omega}{\omega_0}\,,\\ &\text{für } x_3^*\text{:} && \frac{1}{5}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - 1{,}81516\,A^2\sqrt[3]{\beta} = 1\,, && A\,\beta^{1/6} = 0{,}33194\,\frac{\Omega}{\omega_0}\,. \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Für kleine Beträge von λ wird gemäß (123)

$$\varkappa_1 = A^2\,\Lambda(x_i) = A^2\,\Lambda(x_i^*) + A^2\,\lambda\,\frac{\Lambda'(x_i^*)}{f'(x_i^*)}\,. \tag{129}$$

Das Vorzeichen des Koeffizienten von λ wird für x_2^* positiv, für x_1^* und x_3^* negativ, so daß, falls $\lambda > 0$, die A-Responsekurve für x_1 und x_3 links, für x_2 rechts von der Skelettkurve verläuft. Für $\lambda < 0$ ist es gerade umgekehrt.

Auch hier gibt es in der (A, Ω)-Ebene für ein gewisses negatives A eine Verzweigung, die aber genau wie im vorigen Abschnitt für die Gesamtlösung keine Verzweigung bedeutet, da die zu diesem A gehörenden Werte von φ_{30} verschieden voneinander sind. Man erhält

$$\lambda_\varkappa = -\,1{,}554209\,, \qquad x_1 = \frac{9}{82} = +\,0{,}109756\,, \quad x_2 = +\,1{,}062379\,, \quad x_3 = -\,0{,}952623 \tag{130}$$

mit den zugehörigen Werten von $\varkappa_1$

$$\text{für } x_1\text{:} \quad \varkappa_1 = \frac{41}{120}A^2\,, \qquad \text{für } x_{2,3}\text{:} \quad \varkappa_1 = 123{,}98781\,\frac{A^2}{120}\,. \tag{131}$$

Für kleine Beträge von A, also große Beträge von λ gibt es jeweils nur eine Wurzel, die in erster Näherung gegeben ist durch

$$x \approx \frac{1}{A}\sqrt[3]{\frac{125\,F}{123}} \approx \frac{\sqrt[3]{F}}{A}\,, \qquad \varphi_{30} \approx \sqrt[3]{F}\,. \tag{132}$$

Diesem Zweig der Subharmonischen ist offenbar für $A > 0$ die große positive Wurzel von (124) zugeordnet, er muß sich also mit zunehmendem A der zu x_2 gehörenden Skelettlinie nähern, und zwar wie wir oben gezeigt haben, von rechts her.

Ist hingegen $A < 0$, so gehört dieser Zweig zu der großen negativen Wurzel, muß sich also in der unteren Halbebene asymptotisch der zu x_3 gehörigen Skelettlinie nähern, und zwar ebenfalls von rechts her.

Im Grenzfall $A \to 0$ wird nach (132) $\varphi_{30} \approx \sqrt[3]{F}$ und somit nach (121) $\varkappa_1 \approx 2/3\, F^{2/3}$. Den gleichen Wert für $\varkappa_1$ erhält man auch aus der Grundlösung, wenn man dort $\varphi_{30} \approx \sqrt[3]{F}$ einträgt. Die Verzweigung der Grundlösung erfolgt also für $\varkappa_1 \approx 2/3\, F^{2/3}$.

In Abb. 4 ist nun die A-Responsekurve in derselben Weise wie im vorigen Abschnitt schematisch aufgetragen. Die auch im Normalfall auftretende Subharmonische entspricht dem Ast, der die

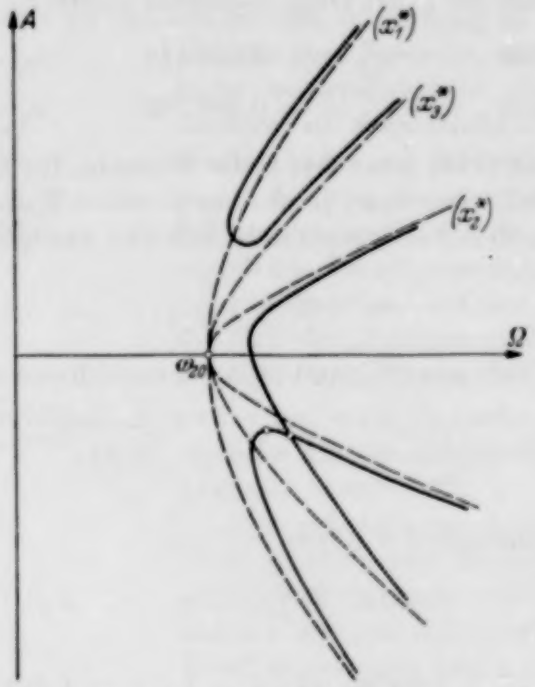


Abb. 4. Die A-Response-Kurve in der Umgebung der Frequenz der Oberschwingung.

Ω-Achse schneidet; die beiden jeweils in endlichem Abstand von der Ω-Achse beginnenden Äste sind die Subharmonischen zu den beiden anderen Eigenschwingungen, die zur Grundfrequenz gehören. Da in der Responsekurve der Gesamtamplitude zu diesen Subharmonischen auch noch die drei Äste der Grundlösung hinzukommen, gibt es also hier rechts von dem Verzweigungspunkt in der Tat, wie in der Einleitung schon ausgesprochen wurde, insgesamt neun mögliche Lösungen.

(Eingegangen am 24. Mai 1957.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *C. Schmieden*, Darmstadt, Technische Hochschule, Mathematisches Institut.

Über die Beulsicherheit von Kreisplatten mit kreiszylindrischer Aelotropie

Von S. Woinowsky-Krieger

1. Differentialgleichung der Biegung einer aelotropen Platte. Das Material der Kreisplatte besitze eine kreiszylindrische Aelotropie, deren Symmetrieachse mit der geometrischen Symmetrieachse der Platte zusammenfallen möge. Alle Ebenen, die speziell diese Achse enthalten sind dann in bezug auf das elastische Verhalten des Plattenmaterials gleichwertig. Die folgenden Ausführungen seien auf achsensymmetrische Belastungs- und Deformationszustände der Platte beschränkt; auch soll von allen Vereinfachungen der *Kirchoff*schen Plattentheorie, die Isotropie des Materials ausgenommen, Gebrauch gemacht werden.

Zwischen den an einem Plattenelement wirkenden Normalspannungen σ_r, σ_t (Abb. 1) und den zugehörigen Dehnungen ε_r, ε_t bestehen nun die Beziehungen

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \frac{\sigma_t}{E'}, \qquad \varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_t} - \frac{\sigma_r}{E'}, \tag{1}$$

worin E_r, E_t und E' drei elastische Konstanten bedeuten. Die Dehnungen sind ihrerseits durch die Beziehungen

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \qquad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \tag{2}$$

mit der radialen Verschiebung u verknüpft, und wenn man auch die Plattendurchbiegung w einführt, so hat man noch die Relation

$$u = -z\frac{dw}{dr}. \tag{3}$$

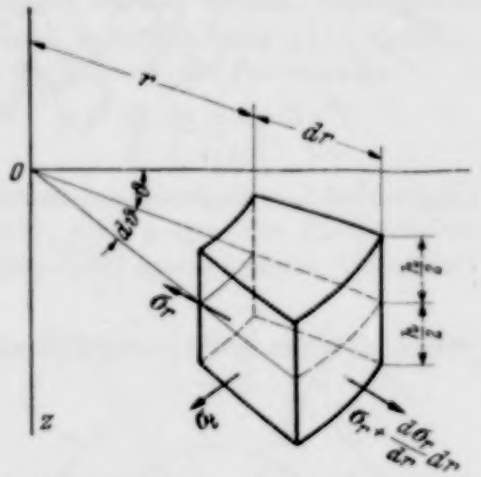


Abb. 1. Plattenelement im Koordinatensystem.

Die Biegemomente der Platte

$$m_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z\, dz, \qquad m_t = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t z\, dz,$$

wo h die als konstant vorausgesetzte Plattendicke bezeichnen soll, lassen sich jetzt sukzessive durch $(\varepsilon_r, \varepsilon_t)$ und alsdann durch w ausdrücken. Sie ergeben sich schließlich in der Form

$$m_r = -D_r\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu_t}{r}\frac{dw}{dr}\right), \qquad m_t = -D_t\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu_r\frac{d^2w}{dr^2}\right), \tag{4}$$

worin ist

$$D_r = \frac{E_r h^3}{12\,(1-\nu_r\nu_t)}, \qquad D_t = \frac{E_t h^3}{12\,(1-\nu_r\nu_t)}, \tag{5}$$

$$\nu_r = \frac{E_r}{E'} \quad \text{und} \quad \nu_t = \frac{E_t}{E'}. \tag{6}$$

Die Bedingung des Gleichgewichtes der an einem Plattenelement (Abb. 1) angreifenden Kräftepaare liefert noch die radiale Scherkraft

$$q_r = -\left[D_r\left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}\right) - D_t\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right]. \tag{7}$$

Projiziert man schließlich die am selben Element einschließlich der Flächenlast $p\,r\,dr\,d\vartheta$ wirkenden Kräfte auf die Achse z, so erhält man die Gleichgewichtsgleichung

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)q_r + p = 0,$$

die nach Substitution von (7) auf die folgende Differentialgleichung[1] der Biegung der achsensymmetrisch belasteten aelotropen Platte führt:

$$\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3w}{dr^3} + k^2\left(-\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr}\right) = \frac{p}{D_r}. \tag{8}$$

[1] Vgl. auch *S. G. Lechnickij*, Anisotrope Platten, S. 207. Moskau 1947 (Russisch).

Die Aelotropie des Materials ist hierbei durch den Parameter

$$k = \sqrt{\frac{D_t}{D_r}} = \sqrt{\frac{E_t}{E_r}} \tag{9}$$

gekennzeichnet.

2. Beuldruck einer Platte aus aelotropem Material. In Abwesenheit einer transversalen Belastung hängt die Belastungsfunktion $p(r)$ in der Gleichung (8) nur von dem Kräftespiel in der Mittelebene der Platte und von den Krümmungen dieser Ebene nach der vorausgesetzten Deformation ab.

Die Plattenscheibe sei nun einem gleichmäßigen Radialdruck von der Größe n je Längeneinheit des Umfanges ausgesetzt (Abb. 2). Das Gleichgewicht eines Scheibenelementes drückt sich bei achsensymmetrischem Zustand der Scheibe durch die Beziehung

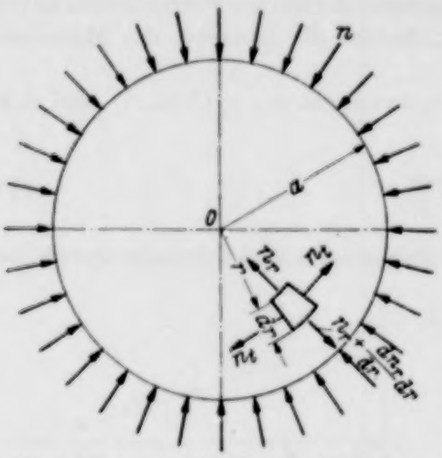


Abb. 2. Platte unter gleichförmigem Radialdruck.

$$\frac{dn_r}{dr} + \frac{n_r - n_t}{r} = 0 \tag{10}$$

zwischen den radialen Kräften n_r und den tangentialen Kräften n_t aus. Da $n_r = h\,\sigma_r$ und $n_t = h\,\sigma_t$, so ergibt sich aus den Gleichungen (1) und (2)

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{h}\left(\frac{n_r}{E_r} - \frac{n_t}{E'}\right), \qquad \frac{u}{r} = \frac{1}{h}\left(\frac{n_t}{E_t} - \frac{n_r}{E'}\right). \tag{11}$$

Die Radialverschiebung u läßt sich aus (11) sofort eliminieren, alsdann auch n_t mit Hilfe der Gleichung (10). Für n_r besteht noch die Grenzbedingung $(n_r)_{r=a} = -n$. Dies alles führt zu dem Endergebnis

$$n_r = -n\left(\frac{r}{a}\right)^{k-1}, \qquad n_t = -n\,k\left(\frac{r}{a}\right)^{k-1}, \qquad u = \frac{n\,a}{h}\left(\frac{1}{E'} - \frac{k}{E_t}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{k} \tag{12}$$

mit dem schon früher eingeführten Parameter

$$k = \sqrt{\frac{E_t}{E_r}}. \tag{13}$$

Für $k = 1$ liefern die Ausdrücke (12) den Spannungszustand $n_r = n_t = -n$ einer isotropen Scheibe; bei $k > 1$ ergibt sich ein unbegrenztes Anwachsen der Spannungen gegen den Mittelpunkt $r = 0$, womit die Anwendung der Lösung, die ja eine volle Kreisscheibe voraussetzt, sich in jenem Bereich von selbst ausschließt.

Unter der Annahme einer achsensymmetrischen Beulform der Platte ergeben nun die Druckkräfte (12) eine transversale Belastung von der Größe[1]

$$p = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,n_r\frac{dw}{dr}\right) = -n\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{k-1}\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{k}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^{k-2}\frac{dw}{dr}\right]. \tag{14}$$

Geht man hiermit in die Gleichungen (8) ein und setzt noch zur Abkürzung

$$\frac{n\,a^2}{D_r} = \lambda^2, \qquad \frac{r}{a} = \varrho, \tag{15}$$

so erhält man die Differentialgleichung für die Auslenkung w in der Form

$$w^{\mathrm{IV}} + \frac{2}{\varrho}w^{\mathrm{III}} + \left(\lambda^2\varrho^{k-1} - \frac{k^2}{\varrho^2}\right)w^{\mathrm{II}} + \left(\lambda^2 k\,\varrho^{k-2} + \frac{k^2}{\varrho^3}\right)w^{\mathrm{I}} = 0, \tag{16}$$

wobei Striche bzw. römische Ziffern Ableitungen nach ϱ bedeuten. Führt man schließlich $\varphi = -w^{\mathrm{I}}/a = -dw/dr$ als eine neue abhängige Variable ein, so geht die vorstehende Gleichung in die Gleichung dritter Ordnung

$$\left(\frac{d}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right)\left[\varphi'' + \frac{\varphi'}{\varrho} + \left(\lambda^2\varrho^{k-1} - \frac{k^2}{\varrho^2}\right)\varphi\right] = 0 \tag{17}$$

[1] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 1, S. 652, 2. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

über. Wir werden vor allen Dingen mit der Differentialgleichung

$$\varrho^2 \varphi'' + \varrho \varphi' + (\lambda^2 \varrho^{k+1} - k^2) \varphi = 0 \tag{18}$$

zu tun haben, deren Lösungen auch Lösungen der Gleichung (17) sind. Mit

$$x = \frac{2\lambda}{k+1} \varrho^{\frac{k+1}{2}} \tag{19}$$

geht diese Gleichung in

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x \frac{d\varphi}{dx} + \left[x^2 - \frac{4k^2}{(k+1)^2}\right] \varphi = 0\,, \tag{20}$$

d. h. in eine *Besselsche* Differentialgleichung über, so daß sich für φ eine Lösung

$$\varphi = C_1 J_{\frac{2k}{k+1}} \left(\frac{2\lambda}{k+1} \varrho^{\frac{k+1}{2}} \right) \tag{21}$$

ergibt, worin C_1 eine im Folgenden unbestimmt bleibende Konstante bezeichnet. Setzt man noch zur Abkürzung $2k/(k+1) = \mu$, so erhält man eine zweite Lösung der Gleichung (20) entweder in der Form $C_2 Y_\mu(x)$ oder in der Form $C_2 J_{-\mu}(x)$, je nachdem ob μ ganzzahlig (dies nur wenn $k = 0$, 1, ∞) oder nicht-ganzzahlig ist. In beiden Fällen führt die zweite Lösung zu unendlichen Deformationen im Mittelpunkt der Platte und ist daher auszuschließen. Eine dritte Lösung der Gleichung (17), endlich, hat die Form einer Potenzreihe

$$\varphi = C_3 (\varrho + a_1 \lambda^2 \varrho^{k+2} + a_2 \lambda^4 \varrho^{2k+3} + \cdots)\,,$$

deren erstes Glied, dem Ausdruck (7) gemäß, eine gegen die Plattenmitte unbegrenzt anwachsende Querkraft

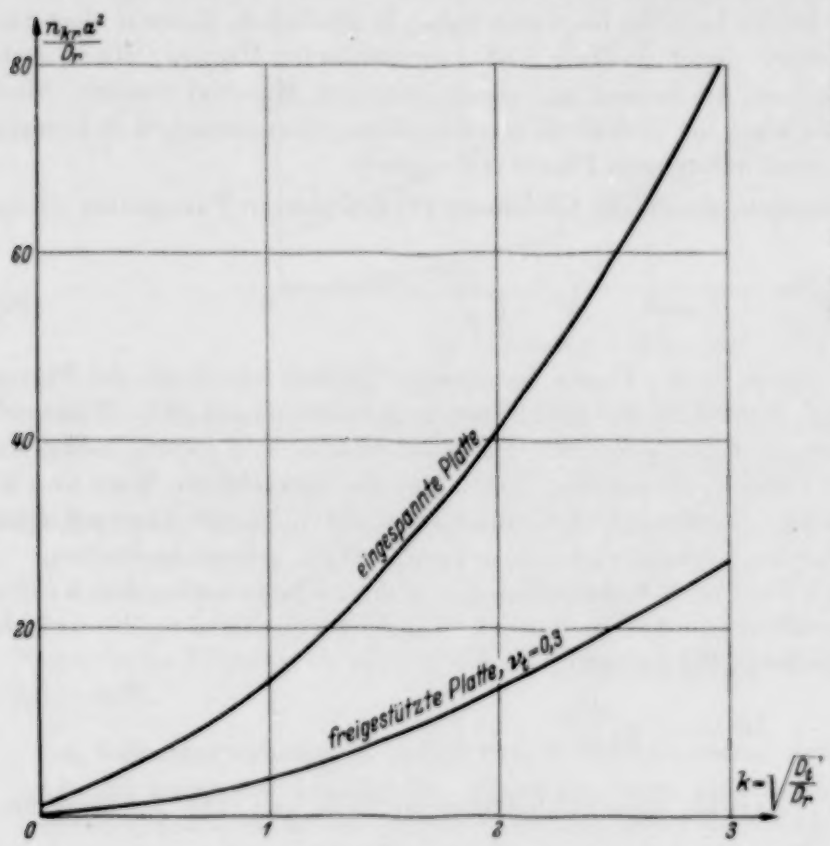


Abb. 3. Beuldruck in Abhängigkeit von D_r/a^2.

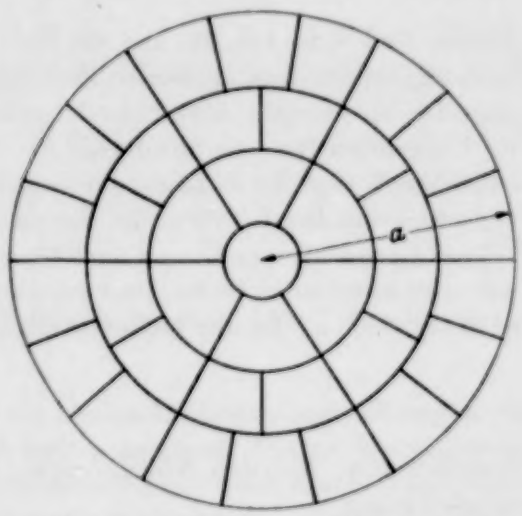


Abb. 4. Eine durch Rippen versteifte Kreisplatte.

ergibt. Für eine Platte ohne Bohrung und ohne einen Stützpunkt in der Mitte müssen wir wiederum $C_3 = 0$ setzen. Die Tangentenneigung $\varphi(\varrho)$ der achsensymmetrisch verbeulten Platte ist also endgültig durch die Gleichung (21) bestimmt. Die zugehörige Beulkraft möge unter den folgenden beiden Annahmen berechnet werden:

a) Die Platte ist am Rande eingespannt. Die Randbedingung ist $\varphi = 0$ für $\varrho = 1$; bezeichnet man also mit j_μ die erste Nullstelle der Funktion $J_\mu(x)$, wo $\mu = 2k/(k+1)$, so bestimmt sich der zugehörige Eigenwert λ aus der Gleichung (19) zu $\lambda = (k+1) j_\mu/2$, und die erste der Gleichungen (15) liefert den kritischen Druck

$$n_{kr} = \frac{(k+1)^2 j_\mu^2}{4} \frac{D_r}{a^2}\,. \tag{22}$$

Praktisch geht man natürlich von μ-Werten aus, für die die Nullstellen der Funktion $J_\mu(x)$ tabuliert sind und bestimmt danach den jeweiligen Wert $k = \mu/(2-\mu)$. Die Relation (22) ergibt somit eine Kurve, die in der Abb. 3 zur Darstellung gebracht ist.

b) Die Platte ist freigestützt. Die Randbedingung folgt aus den Formeln (4) und schreibt sich

$$\left(\frac{d\varphi}{d\varrho} + \nu_t \frac{\varphi}{\varrho}\right)_{\varrho=1} = 0 \,. \tag{23}$$

Unter Berücksichtigung der Differentialformel

$$J'_\mu(x) = J_{\mu-1}(x) - \frac{\mu}{x} J_\mu(x)$$

und der Bezeichnung (19) läßt sich der Gleichung (23) die Form

$$[x\, J_{\mu-1}(x) - (\mu - \nu_t)\, J_\mu(x)]_{\varrho=1} = 0 \tag{24}$$

geben. Ist $i_\mu = 0$ die kleinste Wurzel dieser Gleichung, so ergibt sich für den kritischen Radialdruck der Ausdruck

$$n_{kr} = \frac{(k+1)^2\, i_\mu^2\, D_r}{4\, a^2} \,. \tag{25}$$

Die zugehörige Kurve findet man ebenfalls in der Abb. 3.

3. Beuldruck einer gleichmäßig gespannten Platte. Wie es vor allem in den Gleichungen (9) und (12) zum Ausdruck kommt, wurde bisher eine aelotrope Platte behandelt, die aus homogenem Material besteht und eine überall gleiche Dicke hat. Es liegt nun nahe, in ähnlicher, diesmal aber nur angenäherten Weise, die Stabilität einer durch radiale und konzentrische Rippen, etwa nach Abb. 4 ausgesteiften Platte zu untersuchen, die an sich aus einem isotropen Material besteht. Sind die Rippenabstände einer solchen Platte klein im Verhältnis zu ihren Gesamtbemessungen so kommt ihr elastisches Verhalten demjenigen einer aelotropen Platte etwa gleich.

Wir führen jetzt an Stelle eines einzigen, durch die Gleichung (9) definierten Parameters deren zwei, nämlich

$$k = \sqrt{\frac{I_t}{I_r}} \qquad \text{und} \qquad k' = \sqrt{\frac{F_t}{F_r}} \,. \tag{26}$$

Hierin sind I_t und I_r die auf die Einheitsbreite der Platte bezogenen Trägheitsmomente der Platte in tangentialer bzw. radialer Richtung, F_t und F_r die betreffenden Querschnittsinhalte. Während nun die im vorigen Abschnitt berechneten Eigenwerte für den Sonderfall $k' = k$ galten, sollen sie im Folgenden für den Sonderfall $k' = 1$ ermittelt werden. Liegt also der tatsächliche Wert von k' zwischen k und 1, so kann der zugehörige Beuldruck näherungsweise durch lineare Interpolation zwischen den Beulwerten, die diesen beiden Grenzwerten von k' entsprechen, gewonnen werden.

Im Grenzfall von $k' = 1$ verhält sich die Platte hinsichtlich der in ihrer Ebene wirkenden Kräfte wie eine isotrope Scheibe, und ein gleichförmiger Umfangsdruck von der Intensität n ergibt einfach $n_r = n_t = -n$. In der Differentialgleichung (8) ist somit

$$p = -n\, \Delta w = -n \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

anzunehmen. Mit den Abkürzungen (15) erhält man schließlich, an Stelle von (16), die Differentialgleichung

$$w^{\mathrm{IV}} + \frac{2}{\varrho} w^{\mathrm{III}} + \left(\lambda^2 - \frac{k^2}{\varrho^2}\right) w^{\mathrm{II}} + \left(\frac{\lambda^2}{\varrho} + \frac{k^2}{\varrho^3}\right) w^{\mathrm{I}} = 0 \,. \tag{27}$$

Führt man wieder $\varphi = -w^{\mathrm{I}}/a$ als eine neue Variable ein, so läßt sich die vorstehende Gleichung in die Form

$$\left(\frac{d}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right)\left[\varphi'' + \frac{\varphi'}{\varrho} + \left(\lambda^2 - \frac{k^2}{\varrho^2}\right)\varphi\right] = 0 \tag{28}$$

umschreiben, wonach sich für φ abermals die *Bessel*sche Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x \frac{d\varphi}{dx} + (x^2 - k^2)\,\varphi = 0 \tag{29}$$

mit $x = \lambda \varrho$ ergibt. Die an der Stelle $x = 0$ singuläre Lösung dieser Gleichung und ebenso eine dritte noch vorhandene Lösung der Gleichung (28) bleiben mit derselben Begründung wie in dem vorigen Abschnitt ausgeschlossen. Die endgültige Lösung ist also

$$\varphi = C\, J_k(\lambda\, \varrho) \,, \tag{30}$$

sofern C eine Konstante bezeichnet. Die Berechnung der Eigenwerte soll wiederum in zwei Fällen durchgeführt werden:

a) Die Platte ist am Rande eingespannt. Die Randbedingung $q=0$ bei $\varrho=1$ führt mit Rücksicht auf (15) auf die Beulwerte

$$n_{kr}=j_k^2\frac{D_r}{a^2}, \tag{31}$$

wobei j_k die erste Nullstelle der Funktion $J_k(x)$ bezeichnet, $D_r\approx EI_r$ und E der Elastizitätsmodul des Materials ist, während, mit Rücksicht auf die Rippen, $\nu\approx 0$ gesetzt werden darf.

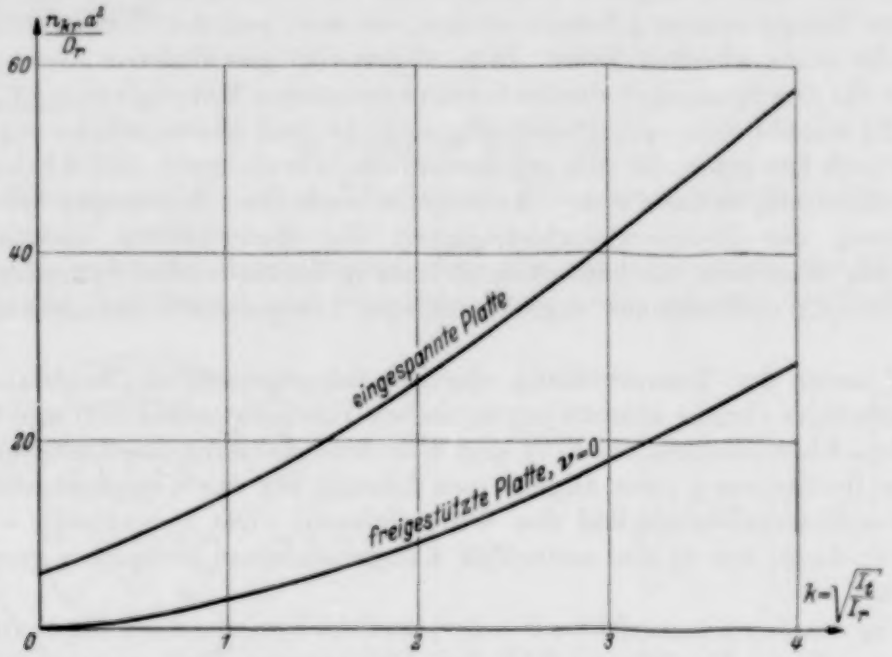


Abb. 5. Beuldruck in Abhängigkeit von D_r/a^2, $k=1$.

b) Die Platte ist freigestützt. Die Randbedingung (23) führt diesmal zu der Beulgleichung

$$\lambda J_{k-1}(\lambda)-(k-\nu_t)J_k(\lambda)=0. \tag{32}$$

Ist $\lambda=i_k$ die kleinste Wurzel dieser Gleichung, so ergibt sich für die Beulkraft der Ausdruck

$$n_{kr}=i_k^2\frac{D_r}{a^2}. \tag{33}$$

Numerische Ergebnisse, auf die die Gleichungen (31) und (33) führen, sind in Abb. 5 durch Kurven dargestellt.

4. Schlußbemerkung. Es möge noch bemerkt werden, daß die beiden Differentialgleichungen (16) und (27) auch zur Lösung des Problems einer kreiszylindrisch aelotropen Platte herangezogen werden können, die außer dem Radialdruck (oder auch Zug) in ihrer Ebene noch einer Transversalbelastung ausgesetzt ist. Wenn q die Intensität dieser Belastung bezeichnet, so muß der rechte Teil der homogenen Gleichungen (16) und (27) durch ein Glied q/D_r ergänzt werden und ihre Lösungen durch ein diesem Gliede entsprechendes partikulares Integral. Wäre schließlich anstatt eines Radialdruckes n ein gleich großer Radialzug vorgeschrieben, so hätte man diesem Umstande durch eine Abänderung des Parameters λ^2 in $-\lambda^2$ Rechnung zu tragen.

(Eingegangen am 7. Juni 1957)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *S. Woinowsky-Krieger*, Quebec (Canada), Université Laval, Boulevard de l'Entente

Wärmespannungen in Hohlzylindern mit temperaturabhängigen Stoffwerten

Von R. Trostel

1. Allgemeines. Mit dem vorliegenden Aufsatz soll ein Beitrag zum Thema Wärmespannungen im Bereich höherer Temperaturen geliefert werden, wo man von der Temperaturabhängigkeit der Materialwerte nicht mehr absehen kann. Eine allgemeine geschlossene Lösung dieses Problemkreises gelingt nur für den Spezialfall elastisch-inkompressiblen Materials ($\nu = 1/2$), der nachfolgend behandelt wird. Er erlaubt eine verhältnismäßig einfache und übersichtliche explizite Darstellung der Spannungen durch Integrale, die sich gegebenenfalls, wie die unter Ziff. 4 behandelten Beispiele zeigen, geschlossen, im allgemeinen aber sehr bequem numerisch bewältigen lassen. Auch der für die Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Materialwerte charakteristische Sachverhalt, daß die aus einer rein mechanischen Belastung herrührenden Spannungen von der Verteilung eines gleichzeitig vorhandenen ungleichmäßigen Temperaturfeldes abhängig sind, läßt sich gut erkennen.

In Ziff. 2 wird unter der Voraussetzung elastisch-inkompressiblen Materials der Spannungszustand für ein beliebiges ebenes achsensymmetrisches Temperaturfeld $\vartheta(r)$ und für einen beliebig mit ϑ veränderlichen Elastizitätsmodul $E(\vartheta)$ und Wärmeausdehnungskoeffizienten $\alpha_t(\vartheta)$ angegeben. In Ziff. 3 folgt die Bestimmung einer allgemeinen Lösung für das Temperaturfeld unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitzahl. Die Berechnung eines Wärmespannungsproblems geht dann, wie in den unter Ziff. 4 abgehandelten Beispielen gezeigt wird, folgendermaßen vor sich.

Nach Ermittlung des Temperaturfeldes $\vartheta = \vartheta(r)$ sind bei Vorgabe der Temperaturabhängigkeiten $E = E(\vartheta)$ bzw. $\alpha_t = \alpha_t(\vartheta)$ die Funktionen $E(\vartheta(r)) = E(r)$ sowie $\alpha_t(\vartheta(r)) = \alpha_t(r)$ gegeben. Sie können nunmehr, zusammen mit $\vartheta(r)$ in die für die Spannungen unter Ziff. 2 gefundenen expliziten Integrallösungen eingesetzt werden, womit nach Integration dann die Spannungen folgen. In den in Ziff. 4 behandelten Beispielen wurde der Wärmespannungszustand in einem Stahlrohr untersucht, wobei jedoch auf den Umstand, daß hier die Querdehnung nicht 1/2 ist, keine Rücksicht genommen werden konnte. Trotzdem erlauben diese Beispiele im Vergleich ihrer Ergebnisse mit denjenigen, die sich nach der üblichen Theorie unveränderlicher Materialwerte unter Verwendung von $\nu = 1/2$ ergeben, eine Aussage über den Einfluß der Temperaturabhängigkeit der Materialwerte generell zu machen. In diesem Sinne kommt man an Hand eines Vergleiches der in Abb. 5 dargestellten Kurven zu dem Resultat, daß die Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Werkstoffwerte bei Stahlrohren auf größere Wärmespannungen führt, als sie sich unter Verwendung unveränderlicher Materialwerte ergeben. Die Unterschiede zwischen den Spannungen sind jedoch gering, wenn bei dem zugehörigen Temperaturfeld die Randtemperaturen vorgegeben sind. In diesem Falle ergibt nämlich die genauere Berechnung des Temperaturfeldes gegenüber einer Rechnung mit konstanter Wärmeleitzahl einen nur kaum merkbaren Unterschied, so daß die Veränderungen der Spannungsbilder praktisch allein von der Veränderlichkeit von E und α_t herrühren. Diese sind jedoch nicht erheblich. Die Verhältnisse können sich jedoch erheblich ändern, wenn für das Temperaturfeld eine andere Randwertaufgabe vorgelegt ist (z. B. Wärmeübergang am Außenrande), so daß die genauere Temperaturverteilung von der mit konstanter Wärmeleitzahl bestimmten bereits merklich abweicht. Hier zeigt sich an Hand der Abb. 6, daß man mit der üblichen Theorie unveränderlicher Materialwerte schon merklich kleinere Wärmespannungen ermittelt, und daß man nur noch dann mit den Ergebnissen der üblichen Theorie unveränderlicher Werte E und α_t auskommt, wenn man wenigstens dem tatsächlichen Temperaturverlauf Rechnung trägt.

2. Ermittlung des Spannungsfeldes. Wir betrachten den mittleren Teil eines sehr langen Hohlzylinders, in dem ein ebenes rotationssymmetrisches Temperaturfeld herrsche und an dessen Mantelflächen $r = r_i$ bzw. $r = r_a$ die Drücke p_i bzw. p_a wirken mögen (Abb. 1). Die Rotationssymmetrie der Belastung und des Temperaturfeldes bedingt dann das Entstehen eines achsensymmetrischen Spannungszustandes, der darüber hinaus im mittleren Rohrbereich von der Zylinderachsenordinate z unabhängig sein muß. Sämtliche Spannungsgrößen, und damit im Sinne des *Hooke*schen Gesetzes

auch sämtliche Verzerrungskomponenten, können daher nur von r abhängig sein. Insbesondere erhält man also für die Axialdehnungen

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = f(r) \tag{1a}$$

und nach Integration

$$w = w(r, z) = z f(r) + g(r). \tag{1b}$$

Nun ist jedoch im mittleren Bereich eines sehr langen Rohres kein Rohrquerschnitt $z = \text{konst.}$ vor einem anderen ausgezeichnet. Daher müssen diese Rohrquerschnitte während der Deformation eben bleiben (Abb. 2), womit

$$f(r) = \text{konst.} = A_1, \quad g(r) = \text{konst.} = A_2 \tag{1c}$$

verbunden ist und aus (1b)

$$w = w(z) = A_1 z + A_2 \tag{1d}$$

hervorgeht. Die Konstanten A_1 und A_2 können aus den Lagerungsbedingungen des Zylinders an seinen Enden bestimmt werden.

Nach dieser vorbereitenden Betrachtung gehen wir zur Berechnung des Spannungszustandes über, der im mittleren Rohrbereich und wegen der Rotationssymmetrie des Problems allein durch

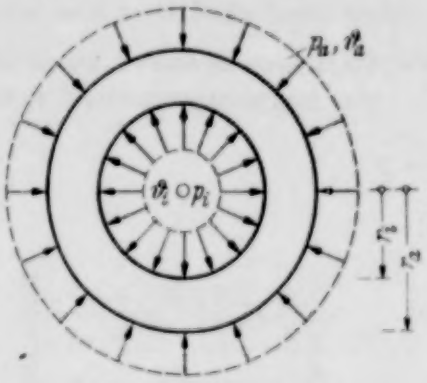


Abb. 1.

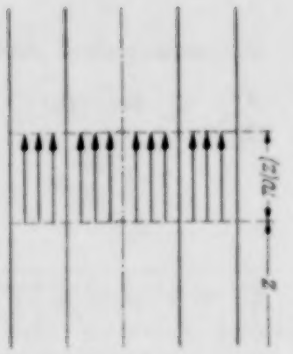


Abb. 2.

Radialspannungen $\sigma_r = \sigma_r(r)$ Ringspannungen $\sigma_\varphi = \sigma_\varphi(r)$ und Achsialspannungen $\sigma_z = \sigma_z(r)$ charakterisierbar ist. Zu ihrer Ermittlung stehen die Gleichgewichtsbedingung für das Körperelement in Radialrichtung zur Verfügung

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi), \tag{2}$$

sowie die durch die Wärmeausdehnungsglieder verallgemeinerten *Hooke*schen Gesetze, die mit $\nu = 1/2$ die Gestalt

$$\varepsilon_r = \frac{dv}{dr} = \frac{1}{E(\vartheta)}\left[\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\varphi + \sigma_z)\right] + \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T)\, dT, \tag{3a}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{v}{r} = \frac{1}{E(\vartheta)}\left[\sigma_\varphi - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_r)\right] + \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T)\, dT, \tag{3b}$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = A_1 = \frac{1}{E(\vartheta)}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi)\right] + \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T)\, dT \tag{3c}$$

haben, wenn mit $\vartheta(r)$ die Temperatur gegenüber dem spannungslosen Ausgangszustand (dessen überall gleiche Temperatur wir mit Null annehmen wollen) bezeichnet wird.

Zunächst erhält man nach Addition von (3a) bis (3c)

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} + A_1 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv) + A_1 = 3\int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T)\, dT$$

woraus nach Integration mit der Integrationskonstanten C_1

$$v = v(r) = \frac{3}{r}\int r\left(\int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t\, dT\right) dr - A_1\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \tag{4}$$

hervorgeht. Beachtet man nun noch, daß aus (3c)

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi) + A_1 E(\vartheta) - E(\vartheta) \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T)\, dT \qquad (5a)$$

folgt, so gewinnt man schließlich aus (3a) oder (3b) mit (4) und (5a)

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = 2E \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T)\, dT - \frac{4E}{r^2}\int r\left(\int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t\, dT\right) dr - \frac{4}{3} C_1 \frac{E}{r^2} = 2\frac{E}{r^2}\int r^2 \alpha_t(\vartheta)\frac{d\vartheta}{dr}\, dr - \frac{4}{3} C_1 \frac{E}{r^2}. \qquad (5b)$$

Hiermit und mit der Gleichgewichtsbedingung (2) folgert man somit für σ_r die Differentialgleichung

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{r^3}\left[\frac{4}{3} C_1 - 2\int r^2 \alpha_t(\vartheta)\frac{d\vartheta}{dr}\, dr\right],$$

deren Lösung mit der Integrationskonstanten C_2

$$\sigma_r = C_2 + \int\left[\frac{E}{r^3}\left(\frac{4}{3} C_1 - 2\int r^2 \alpha_t(\vartheta)\frac{d\vartheta}{dr}\, dr\right)\right] dr \qquad (6)$$

lautet. Die Konstanten C_1 und C_2 werden aus den Randbedingungen

$$\sigma_r(r = r_i) = -p_i \quad \text{und} \quad \sigma_r(r = r_a) = -p_a \quad \text{zu}$$

$$\frac{4}{3} C_1 = \frac{p_i - p_a}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3}\, dr} + 2\,\frac{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3}\left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr}\, dr\right) dr}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3}\, dr}, \qquad (7a)$$

$$C_2 = -p_i + 2\left[\int \frac{E}{r^3}\left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr}\, dr\right) dr\right]_{r=r_i} - \frac{4}{3} C_1 \left[\int \frac{E}{r^3}\, dr\right]_{r=r_i} \qquad (7b)$$

bestimmt, so daß letztlich für die Radialspannungen

$$\sigma_r = -p_i + (p_i - p_a)\frac{\int_{r_i}^{r} \frac{E}{r^3}\, dr}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3}\, dr} + 2\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3}\left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr}\, dr\right) dr \left[\frac{\int_{r_i}^{r} \frac{E}{r^3}\, dr}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3}\, dr} - \frac{\int_{r_i}^{r} \frac{E}{r^3}\left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr}\, dr\right) dr}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3}\left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr}\, dr\right) dr}\right] \qquad (8a)$$

und damit aus (5b) für die Ringspannungen

$$\sigma_\varphi = \sigma_r - 2\frac{E}{r^2}\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr}\, dr + \frac{4}{3} C_1 \frac{E}{r^2} = -p_i + (p_i - p_a)\frac{\frac{E}{r^2} + \int_{r_i}^{r} \frac{E}{r^3}\, dr}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3}\, dr} +$$

$$+ 2\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3}\left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr}\, dr\right) dr \left[\frac{\frac{E}{r^2} + \int_{r_i}^{r} \frac{E}{r^3}\, dr}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3}\, dr} - \frac{\frac{E}{r^2}\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr}\, dr + \int_{r_i}^{r} \frac{E}{r^3}\left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr}\, dr\right) dr}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3}\left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr}\, dr\right) dr}\right] \qquad (8b)$$

hervorgeht[1]. Sowohl in (8a) als auch in (8b) ist die Konstante A_1 nicht mehr enthalten. Auch bei

[1] Für eine numerische Integration sind die in den Doppelintegralen auftretenden inneren Integrale jeweils als bestimmte Integrale in den Grenzen $r_i \ldots r$ aufzufassen.

dieser Betrachtung zeigt sich also, daß die Lagerungsverhältnisse des Zylinders an seinen Enden auf die Radial- und Ringspannungen keinen Einfluß haben, sondern sich nur auf die Achsialspannungen σ_z auswirken. Für diese folgt nämlich aus (5a) mit (8a) und (8b)

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi) - E\int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T)\,dT + EA_1 = EA_1 - E\int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T)dT - p_i + (p_i - p_a)\frac{\dfrac{E}{2r^2} + \displaystyle\int_{r_i}^{r}\frac{E}{r^3}\,dr}{\displaystyle\int_{r_i}^{r_a}\frac{E}{r^3}\,dr} +$$

$$+ 2\int_{r_i}^{r_a}\frac{E}{r^3}\left(\int r^2\,\alpha_t\frac{d\vartheta}{dr}\,dr\right)dr\left[\frac{\dfrac{E}{2r^2} + \displaystyle\int_{r_i}^{r}\frac{E}{r^3}\,dr}{\displaystyle\int_{r_i}^{r_a}\frac{E}{r^3}\,dr} - \frac{\dfrac{E}{2r^2}\displaystyle\int r^2\,\alpha_t\frac{d\vartheta}{dr}\,dr + \int_{r_i}^{r}\frac{E}{r^3}\left(\int r^2\,\alpha_t\frac{d\vartheta}{dr}\,dr\right)dr}{\displaystyle\int_{r_i}^{r_a}\frac{E}{r^3}\left(\int r^2\alpha_t\frac{d\vartheta}{dr}\,dr\right)dr}\right] \tag{8c}$$

und man kann nun zwei Fälle behandeln:

1) Das Rohr ist zwischen zwei starren Wänden gemäß Abb. 3 eingeklemmt. In diesem Falle liegt ein ebener Verzerrungszustand mit

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = A_1 = 0 \tag{8d}$$

vor.

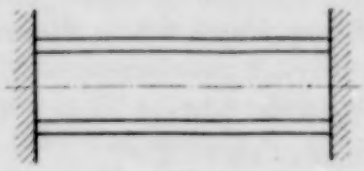


Abb. 3.

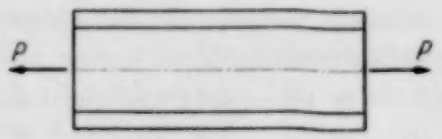


Abb. 4.

2) Die Ausdehnung der Zylinderenden werde in Achsialrichtung durch eine, auf die Zylinderenden wirkende resultierende Kraft P gemäß Abb. 4 behindert. In diesem Falle müssen die in einem Rohrquerschnitt $z = \text{konst.}$ wirkenden Achsialspannungen die Resultierende P haben. Demnach folgt A_1 hierfür aus der Gleichung

$$\int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_z\,dr = \frac{P}{2\pi}.$$

Nach Einsetzen von (8c) folgt hieraus mit Beachtung von

$$\int_{r_i}^{r_a} r\,(\sigma_r + \sigma_\varphi)\,dr = \int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_r\,dr + \int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_\varphi\,dr = \int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_r\,dr + \int_{r_i}^{r_a} r\,\frac{d}{dr}(r\,\sigma_r)\,dr$$

$$= \int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_r\,dr + r^2\,\sigma_r\Big|_{r_i}^{r_a} - \int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_r\,dr = p_i\,r_i^2 - p_a\,r_a^2$$

schließlich

$$A_1 = \frac{1}{\displaystyle\int_{r_i}^{r_a} r\,E\,dr}\left(\frac{P}{2\pi} + \frac{1}{2}(p_a\,r_a^2 - p_i\,r_i^2) + \int_{r_i}^{r_a} r\,E\left(\int_{T=0}^{\vartheta(r)}\alpha_t(T)\,dT\right)dr\right). \tag{8e}$$

3. Das Temperaturfeld. Unter Verwendung des *Fourier*schen Wärmeleitungstheorems ($\mathfrak{q} = -\lambda \nabla \vartheta$) liefert die Wärmemengenbilanz am Körperelement im stationären Falle, sofern keine Wärmequellen vorhanden sind,

$$\nabla \mathfrak{q} = -\nabla(\lambda \nabla \vartheta) = 0, \quad \text{also} \quad \nabla(\lambda \nabla \vartheta) = \nabla\lambda \nabla\vartheta + \lambda \triangle \vartheta = 0$$

bzw. im vorliegenden rotationssymmetrischen Falle

$$\frac{d\lambda}{dr} \cdot \frac{d\vartheta}{dr} + \lambda \left(\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{d\vartheta}{dr} \right) = 0$$

woraus

$$r \lambda \frac{d\vartheta}{dr} = C_1 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{C_1}{r} dr$$

und nach Trennung der Veränderlichen und Integration

$$\int \lambda(\vartheta)\, d\vartheta = C_1 \ln r + C_2 \tag{9}$$

folgt. Bei Vorgabe der Temperaturabhängigkeit $\lambda = \lambda(\vartheta)$ der Wärmeleitzahl ist Gleichung (9) integrierbar, und die Konstanten werden aus den Randbedingungen des Problems bestimmt.

4. Beispiele. a) Wir betrachten ein Stahlrohr mit freien Enden, dessen Mantelflächen $r = r_i = 12$ cm bzw. $r = r_a = 18$ cm die Temperaturen $\vartheta_i = 350°$ C bzw. $\vartheta_a = 280°$ C gegenüber der Temperatur $\vartheta = 0°$ C des spannungslosen Ausgangszustandes besitzen sollen. Die Temperaturabhängigkeit der Materialkonstanten kann im Bereich bis etwa 400° C nach dem „Werkstoff-Handbuch für Stahl und Eisen", 3. Aufl., Düsseldorf 1953 mit genügender Genauigkeit durch

$$\lambda(\vartheta) = \lambda_0 - \lambda_1 \vartheta, \tag{10a}$$

$$\alpha_t(\vartheta) = \alpha_{t0} + \alpha_{t1} \vartheta, \tag{10b}$$

$$E(\vartheta) = E_0 - E_1 \vartheta^2 \tag{10c}$$

approximiert werden, wobei z. B. für einen unlegierten Stahl an Hand des in diesem Buche gegebenen Kurvenmaterials

$$\lambda_0 = \lambda(\vartheta = 0° \text{ C}) = 0{,}12 \text{ [cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ °C}^{-1}\text{]}, \quad \lambda_1 = 0{,}000.07 \text{ [cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ °C}^{-2}\text{]},$$
$$\alpha_{t0} = \alpha_t(\vartheta = 0° \text{ C}) = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ [°C}^{-1}\text{]}, \qquad \alpha_{t1} = 0{,}001 \cdot 10^{-5} \text{ [°C}^{-2}\text{]},$$
$$E_0 = E(\vartheta = 0° \text{ C}) = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ [kgcm}^{-2}\text{]}, \qquad E_1 = 3{,}2 \text{ [kgcm}^{-2} \text{ °C}^{-2}\text{]}$$

abzulesen sind.

Zunächst folgt mit (10a) aus (9) nach Integration

$$\lambda_0 \vartheta - \frac{\lambda_1}{2} \vartheta^2 = C_1 \ln r + C_2 \quad \text{bzw.} \quad \vartheta(r) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 - \frac{2}{\lambda_1}(C_1 \ln r + C_2)}.$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich aus den Randbedingungen $\vartheta(r = r_i) = \vartheta_i$ und $\vartheta(r = r_a) = \vartheta_a$ zu

$$C_1 = -\frac{\lambda_1}{2} \frac{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_a\right)^2 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_i\right)^2}{\ln \frac{r_a}{r_i}}, \quad C_2 = -C_1 \ln r_i + \frac{\lambda_1}{2} \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_i\right)^2 \right],$$

so daß letztlich für das Temperaturfeld

$$\vartheta(r) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_i\right)^2 \frac{\ln \frac{r_a}{r}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_a\right)^2 \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}}} \tag{11}$$

hervorgeht.

Selbstverständlich erhält man für $\lambda_1 \to 0$, d. h. für $\lambda_0/\lambda_1 \to \infty$ aus (11) die Lösung für das Temperaturfeld bei konstanter Wärmeleitzahl, indem man zunächst (11) mit $x_1 = \lambda_0/\lambda_1$ bzw. $x_2 = x_1 = \lambda_0/\lambda_1$ in der Form

$$\vartheta(r_1 x_1 - \vartheta_i, x_2 - \vartheta_a) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \sqrt{(x_1 - \vartheta_i)^2 \frac{\ln \frac{r_a}{r}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} + (x_2 - \vartheta_a)^2 \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}}}$$

schreibt, und nunmehr für $x_1 \gg \vartheta_i$ bzw. $x_2 \gg \vartheta_a$ das Temperaturfeld $\vartheta(r, x_1-\vartheta_i, x_2-\vartheta_a)$ nach Maßgabe der *Taylor*schen Formel in der Form

$$\vartheta(r; x_1-\vartheta_i; x_2-\vartheta_a) \approx \vartheta(r, x_1, x_2) - \vartheta_i \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1}\right|_{x_1, x_2, r} - \vartheta_a \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2}\right|_{r, x_1, x_2}$$

approximiert. Man erhält wegen

$$\vartheta(r, x_1, x_2) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 \frac{\ln\frac{r_a}{r}}{\ln\frac{r_a}{r_i}} + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 \frac{\ln\frac{r}{r_i}}{\ln\frac{r_a}{r_i}}} = 0$$

sowie

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1}\right|_{r, x_1, x_2} = -\frac{\ln\frac{r_a}{r}}{\ln\frac{r_a}{r_i}}, \qquad \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2}\right|_{r, x_1, x_2} = -\frac{\ln\frac{r}{r_i}}{\ln\frac{r_a}{r_i}}$$

schließlich für das Temperaturfeld bei konstanter Wärmeleitzahl die bekannte Relation

$$\vartheta_0(r) = \frac{\vartheta_i \ln\frac{r_a}{r} + \vartheta_a \ln\frac{r}{r_i}}{\ln\frac{r_a}{r_i}}. \tag{12}$$

Ein Vergleich von (11) und (12) für die vorliegenden Zahlenwerte zeigte, daß die genauere Berechnung des Temperaturfeldes bei vorgegebenen Randtemperaturen kaum nennenswerte Abweichungen gegenüber der Näherungslösung $\vartheta_0(r)$ für konstante Wärmeleitzahl λ_0 ergibt. Die Ergebnisse können jedoch recht verschieden sein, wenn man nicht die Randtemperaturen, sondern z. B. eine Aussage über die durchfließende Wärmemenge vorgibt (siehe hierzu das nächste Beispiel b).

Mit Rücksicht auf die geringen Unterschiede zwischen (11) und (12) benutzen wir für das folgende die Näherungslösung $\vartheta_0(r)$ für das Temperaturfeld, womit die Möglichkeit einer geschlossenen Integration der in (8) auftretenden Integrale gegeben ist. Nachdem man (12) sowie (10a) bis (10c) in (8a) und (8b) eingesetzt hat, gewinnt man mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1(r) &= \int_{r_i}^{r} \frac{E}{r^3}\,dr = \frac{E_0}{2 r_i^2}\left\{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 - \frac{E_1 \vartheta_i^2}{E_0}\left[1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_i^2}{\vartheta_i}\right)^2 - \frac{1-\frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\left(1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \frac{\vartheta_0}{\vartheta_i} - \frac{1-\frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}}{2\ln\frac{r_a}{r_i}}\left[1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]\right)\right]\right\},\\
\Phi_2(r) &= \frac{E}{r^2}\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr}\,dr = -E_0 \alpha_{t_0} \vartheta_i \frac{1-\frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}}{2\ln\frac{r_a}{r_i}}\left[1 - \frac{E_1 \vartheta_i^2}{E_0}\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_i}\right)^2\right]\left[1 + \frac{\alpha_{t_1}\vartheta_i}{\alpha_{t_0}}\left(\frac{1-\frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}}{2\ln\frac{r_a}{r_i}} + \frac{\vartheta_0}{\vartheta_i}\right)\right],\\
\Phi_3(r) &= \int_{r_i}^{r} \frac{E}{r^3}\left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr}\,dr\right)dr = \int_{r_i}^{r} \frac{1}{r}\,\Phi_2(r)\,dr =\\
&= -E_0 \alpha_{t_0} \vartheta_i \frac{1-\frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}}{2\ln\frac{r_a}{r_i}}\left\{\left(1 + \frac{\alpha_{t_1}\vartheta_i}{2\alpha_{t_0}}\frac{1-\frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\right)\left(\ln\frac{r}{r_i} - \frac{E_1\vartheta_i^2}{E_0}\frac{\ln\frac{r_a}{r_i}}{3\left(1-\frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}\right)}\left[1 - \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_i}\right)^3\right]\right)\right.\\
&\qquad \left. + \frac{\alpha_{t_1}\vartheta_i}{2\alpha_{t_0}}\frac{\ln\frac{r_a}{r_i}}{1-\frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}}\left(\left[1 - \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_i}\right)^2\right] - \frac{E_1\vartheta_i^2}{2E_0}\left[1 - \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_i}\right)^4\right]\right)\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

für die Radial- und Ringspannungen mit $p_i = p_a = 0$

$$\sigma_r(r) = 2\,\Phi_3(r_a)\left[\frac{\Phi_1(r)}{\Phi_1(r_a)} - \frac{\Phi_3(r)}{\Phi_3(r_a)}\right], \tag{14a}$$

$$\sigma_\varphi(r) = 2\,\Phi_3(r_a)\left[\frac{\frac{E}{r^2} + \Phi_1(r)}{\Phi_1(r_a)} - \frac{\Phi_2(r) + \Phi_3(r)}{\Phi_3(r_a)}\right], \tag{14b}$$

während man für die Achsialspannungen nach (8c)

$$\sigma_z(r) = -E\int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T)\,dT + A_1 E + 2\,\Phi_3(r_a)\left[\frac{\dfrac{E}{2\,r^2}+\Phi_1(r)}{\Phi_1(r_a)} - \frac{\dfrac{1}{2}\,\Phi_2(r)+\Phi_3(r)}{\Phi_3(r_a)}\right] \tag{14c}$$

erhält. Die Konstante A_1 ist im Falle des ebenen Verzerrungszustandes Null und folgt für den Fall freier Zylinderenden, wenn die resultierende Achsialkraft P sowie Innen- und Außendruck p_i und p_a Null sind

$$A_1 = \frac{\int_{r_i}^{r_a} r\,E\left(\int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T)\,dT\right)dr}{\int_{r_i}^{r_a} r\,E\,dr} = \alpha_{t0}\,\frac{J_1 + \dfrac{\alpha_{t1}}{2\alpha_{t0}}J_2 - \dfrac{E_1}{E_0}J_3 - \dfrac{E_1\alpha_{t1}}{2\,E_0\alpha_{t0}}J_4}{J_0 - \dfrac{E_1}{E_0}J_2}, \tag{14d}$$

wobei für die Integrale J_k mit $J_0 = \int_{r_i}^{r_a} r\cdot dr = \frac{1}{2}\,(r_a^2 - r_i^2)$ die Rekursionsformel

$$J_k = \int_{r_i}^{r_a} r\,\vartheta_0^k(r)\,dr = \left[\frac{r^2}{2}\vartheta_0^k(r)\right]_{r=r_i}^{r=r_a} + \frac{k}{2}\,\frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\ln\dfrac{r_a}{r_i}}\,J_{k-1}$$

gilt.

Aus (14) erhält man mit $E_1 = \alpha_{t1} = 0$, also für $E = E_0$, $\alpha_t = \alpha_{t0}$ die aus der üblichen Theorie mittels unveränderlicher Materialwerte für $\nu = 1/2$ folgenden Relationen

$$\sigma_r(r) = -E_0\alpha_{t0}(\vartheta_i - \vartheta_a)\left[\frac{1-\left(\dfrac{r_i}{r}\right)^2}{1-\left(\dfrac{r_i}{r_a}\right)^2} - \frac{\ln\dfrac{r}{r_i}}{\ln\dfrac{r_a}{r_i}}\right], \tag{15a}$$

$$\sigma_\varphi(r) = -E_0\alpha_{t0}(\vartheta_i - \vartheta_a)\left[\frac{1+\left(\dfrac{r_i}{r}\right)^2}{1-\left(\dfrac{r_i}{r_a}\right)^2} - \frac{1+\ln\dfrac{r}{r_i}}{\ln\dfrac{r_a}{r_i}}\right], \tag{15b}$$

$$\sigma_z(r) = -2\,E_0\alpha_{t0}(\vartheta_i - \vartheta_a)\left[\frac{1}{1-\left(\dfrac{r_i}{r_a}\right)^2} - \frac{\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{r}{r_i}}{\ln\dfrac{r_a}{r_i}}\right]. \tag{15c}$$

Die Auswertung der sieben Gleichungen (14) und (15) für die Zahlenwerte des gewählten Beispieles ergaben die in Abb. 5 dargestellten Kurven. Dabei wurden die nach der üblichen Theorie gemäß (15a) bis (15c) ermittelbaren Spannungen gestrichelt dargestellt. Die ausgezogenen Linien geben den genaueren Spannungsverlauf nach den Gln. (14) an, und man erkennt, daß die tatsächlichen Wärmespannungen sogar größer sind als die in üblicher Weise berechneten Werte. Die Unterschiede sind jedoch nur geringfügig, so daß man sich also im allgemeinen, sofern die Randtemperaturen vorgegeben sind, mit der üblichen Theorie, auch im Bereich höherer Temperaturen, begnügen können wird.

b) Als weiteres Beispiel betrachten wir dasselbe Rohr wie unter a) mit derselben Innentemperatur $\vartheta_i = 350^\circ$C, jedoch soll nunmehr am Außenrande Wärmeübergang in Luft der Temperatur $\vartheta_L = 20^\circ$C stattfinden, die das Rohr quer mit einer Geschwindigkeit $w = 20$ m/sec anströmt. Die Randbedingung am Außenrande lautet dann unter Heranziehung des *Newton*schen Abkühlungstheorems

$$q_r(r=r_a) = -\lambda\left.\frac{d\vartheta}{dr}\right|_{r=r_a} = -\alpha\,[\vartheta_L - \vartheta(r_a)], \quad \text{also} \quad \vartheta(r_a) + \frac{\lambda}{\alpha}\left.\frac{d\vartheta}{dr}\right|_{r=r_a} = \vartheta_L, \tag{16}$$

wobei $\vartheta(r_a) = \vartheta_a$ die Randtemperatur des Rohres und α die sog. Wärmeübergangszahl bedeuten. Diese folgt z. B. nach *Merkel* zu

$$\alpha = 0{,}092\,\sqrt[4]{\frac{\lambda_L}{2\,r_a}\,c_{pL}^3\,\gamma_L^3\,w^3}\,. \tag{17}$$

Es ergibt sich, wenn in erster Näherung $\vartheta_a = 310^\circ$C gesetzt wird,

$$\alpha \approx 1{,}8\cdot 10^{-3}\ [\text{cal cm}^{-2}\,\text{sec}^{-1}\,^\circ\text{C}^{-1}]\,.$$

* Hierin sind: λ_L die Wärmeleitzahl, c_{pL} die spezifische Wärmemenge und γ_L das spezifische Gewicht der Luft für die mittlere Temperatur $\vartheta_M = (\vartheta_a + \vartheta_L)/2$.

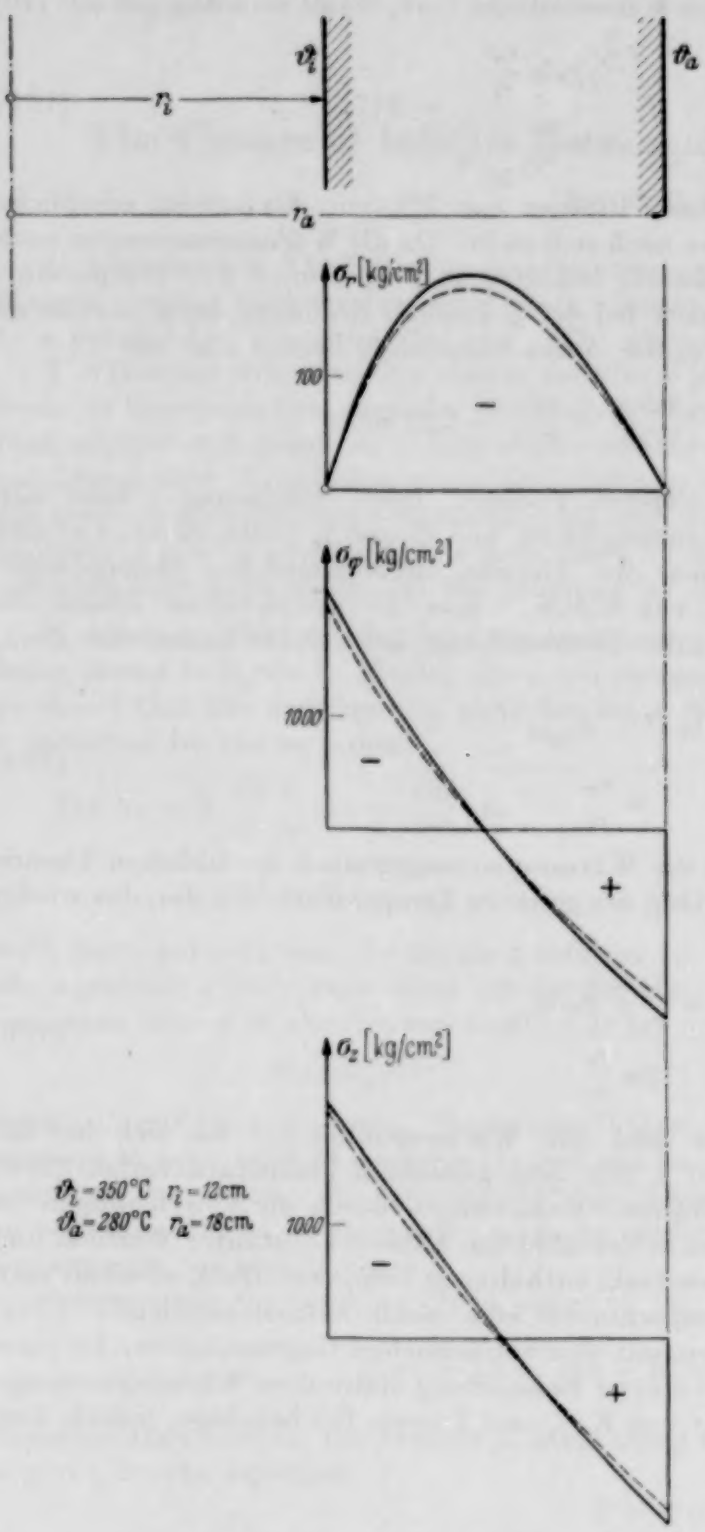


Abb. 5. Wärmespannungen zu Beispiel a:
——— genauere Theorie;
— — — — übliche Theorie.

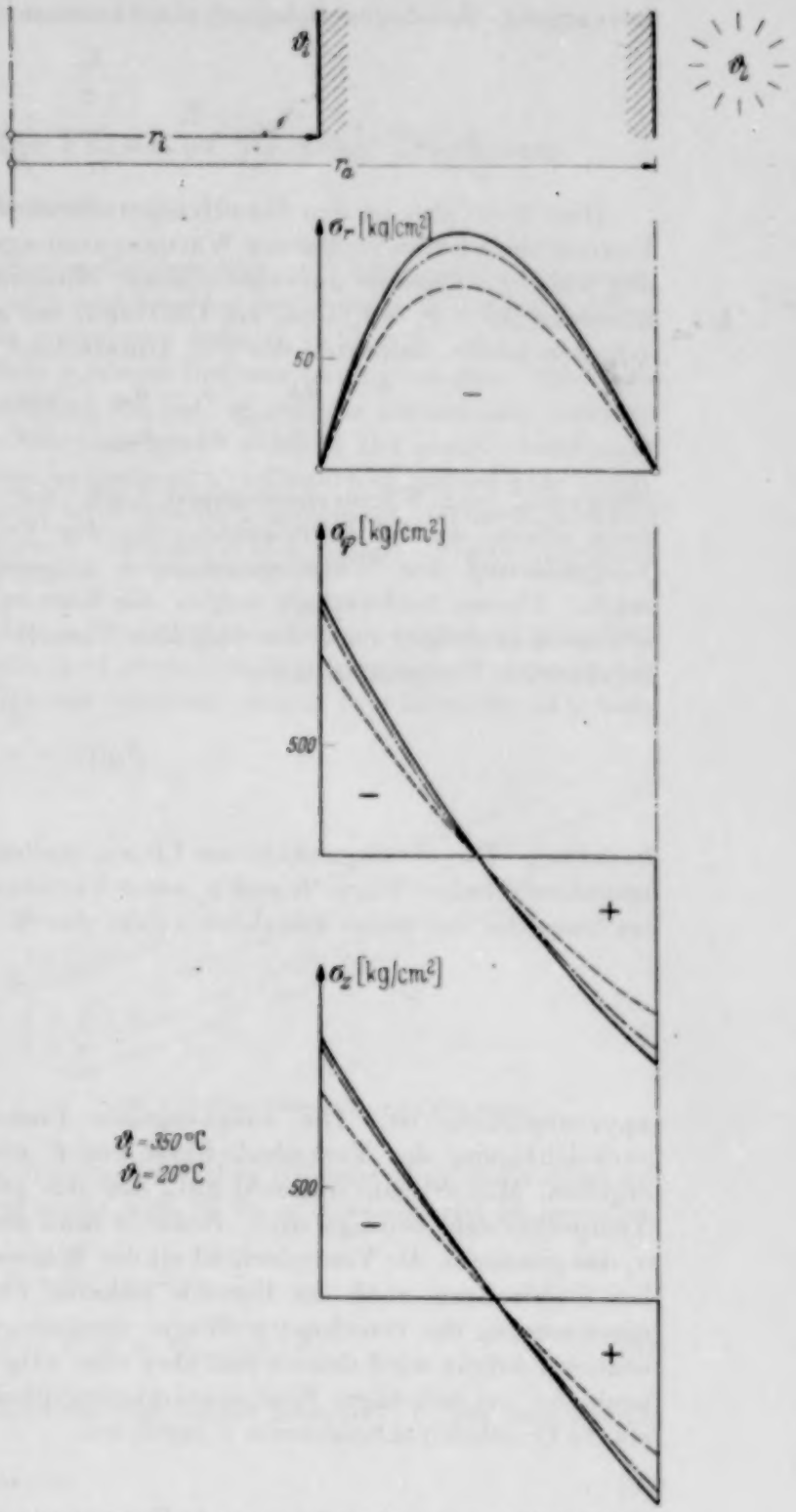


Abb. 6. Wärmespannungen zu Beispiel b: —·—·— übliche Theorie unter Verwendung des genauen Temperaturfeldes; ——— genaue Theorie; — — — — übliche Theorie.

Mit $\lambda(\vartheta_a) = \lambda_0 - \lambda_1 \vartheta_a$ erhält man damit aus (16)

$$\vartheta_a + \frac{\lambda_0 - \lambda_1 \vartheta_a}{\alpha} \left.\frac{d\vartheta}{dr}\right|_{r=r_a} = \vartheta_L ,$$

woraus mit (11) schließlich die Relation

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_a\right)^2 + 2\,\frac{\alpha}{\lambda_1}\, r_a \ln\frac{r_a}{r_i}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_a\right) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_i\right)^2 + 2\,\frac{\alpha}{\lambda_1}\, r_a \ln\frac{r_a}{r_i}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_L\right)$$

mit der Lösung

$$\vartheta_a = \vartheta_{a1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} + \frac{\alpha}{\lambda_1}\, r_a \ln\frac{r_a}{r_i} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\, r_a \ln\frac{r_a}{r_i}\right)^2 + 2\,\frac{\alpha}{\lambda_1}\, r_a \ln\frac{r_a}{r_i}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_L\right) + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_i\right)^2} = 310{,}5^\circ\,\mathrm{C} \quad (18\,\mathrm{a})$$

hervorgeht. Bei Zugrundelegung einer konstanten Wärmeleitzahl $\lambda = \lambda_0$ erhält man dagegen aus (16)

$$\vartheta_a = \vartheta_{aII} = \vartheta_i \frac{\frac{\lambda_0}{\alpha}}{r_a \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{\lambda_0}{\alpha}} + \vartheta_L \frac{r_a \ln \frac{r_a}{r_i}}{r_a \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{\lambda_0}{\alpha}} = 317{,}5^\circ\,\mathrm{C}\,. \tag{18b}$$

Hier liegt also in den Randtemperaturen eine Differenz von 7° C vor, die bereits erhebliche Unterschiede in der Größe der Wärmespannungen nach sich zieht. Da die Wärmespannungen nach der üblichen Theorie unveränderlicher Materialwerte bekanntlich proportional der Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta = \vartheta_i - \vartheta_a$ sind, ein Umstand, der auch bei der genaueren Rechnung noch annähernd erhalten bleibt, bedeuten die 7° C Unterschied in der Außentemperatur bereits eine um

$$\frac{\Delta\vartheta_I}{\Delta\vartheta_{II}} = \frac{\vartheta_i - \vartheta_{aI}}{\vartheta_i - \vartheta_{aII}} = \frac{350 - 310{,}5}{350 - 317{,}5} = \frac{39{,}5}{32{,}5} = 1{,}22\,\text{fache}$$

Steigerung der Wärmespannungen nach der üblichen Theorie. Diese Steigerung erhöht sich noch etwas, da die Berücksichtigung der Veränderlichkeit von E und α_t (siehe Beispiel a) eine Vergrößerung der Wärmespannungen gegenüber der Theorie unveränderlicher Materialwerte ergibt. Diesen Sachverhalt zeigen die Kurven von Abb. 6, worin die gestrichelten Linien die Wärmespannungen nach der üblichen Theorie unter Heranziehung des sich für konstantes $\lambda = \lambda_0$ ergebenden Temperaturfeldes

$$\vartheta_{II}(r) = \frac{\vartheta_i \ln \frac{r_a}{r} + \vartheta_{aII} \ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \tag{19a}$$

bedeuten. Die strichpunktierten Linien stellen die Wärmespannungen nach der üblichen Theorie unveränderlicher Werte E und α_t unter Verwendung des genauen Temperaturfeldes dar, das wieder im Sinne des Beispieles a) nahezu exakt durch

$$\vartheta_I(r) = \frac{\vartheta_i \ln \frac{r_a}{r} + \vartheta_{aI} \ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \tag{19b}$$

approximierbar ist. Die ausgezogenen Linien sind die Wärmespannungen die sich bei Berücksichtigung der Veränderlichkeit von E und α_t mit dem genaueren Temperaturverlauf (19b) ergeben. Man erkennt nun sehr gut, daß die größeren Abweichungen durch die Abweichungen im Temperaturfeld bedingt sind. Benutzt man also in der üblichen Theorie konstanter Werte E und α_t das genauere, die Veränderlichkeit der Wärmeleitzahl enthaltende Temperaturfeld, so erhält man bei Stahlrohren auch im Bereich höherer Temperaturen eine noch zufriedenstellende Übereinstimmung der errechneten Wärmespannungen mit den tatsächlichen Gegebenheiten. In einer weiteren Arbeit wird demnächst über eine allgemeine Behandlung stationärer Wärmespannungsprobleme bei beliebiger Temperaturabhängigkeit von E, α_t und λ sowie für beliebige, jedoch konstante Querkontraktionswerte ν berichtet.

(Eingegangen am 14. Juni 1957.)

Anschrift des Verfassers: Doz. Dr.-Ing. *Rudolf Trostel*, Technische Universität Berlin, Lehrstuhl f. Mechanik (Prof. Dr. Ing. *J. Szabo*) Berlin-Charlottenburg 2, Hardenbergstr. 34.

The Flexure of Infinite Rectangular Plates of Varying Thickness

By H. D. Conway

1. Introduction. The following investigation concerns the bending of a rectangular cantilever plate of varying thickness, clamped along a longer edge and bent by any system of loading applied to a parallel but otherwise free edge. The plate is considered infinite in length.

The first investigation of a similar cantilever plate problem but one having constant thickness seems to have been first made by *MacGregor*[1] who treated the case of a single normal concentrated load applied at a point on a longer side remote from the shorter sides of the plate. *MacGregor* considered that the solution would shed light on the analysis of the flexure of helical gear teeth. His theoretical deflections were checked experimentally with excellent agreement. Other theoretical analyses of similar problems have been made by *Bittner*[2], *Jaramillo*[3] and *Koiter*[4]. Finite difference methods have been applied to the problems by *Holl*[5].

2. Analysis. We consider here the cantilever plate of varying thickness, a sketch of the plate being shown in figure 1. Making the usual assumptions of plate bending theory, it is not difficult to show[6] that the bending of a plate having a thickness variation which is a function of y only is governed by the equation

$$D\Delta\Delta\omega + 2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\omega + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\Delta\omega - (1-\nu)\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \qquad (1)$$

with the usual notation. To obtain a solution to the equation, a very convenient choice for the variation with y of the flexural rigidity D is

$$D = D_0 e^{by} \qquad (2)$$

where D_0 and b are constants. The factor e^{by} then appears in each term of equation (1) and can be cancelled throughout. By selecting suitable values for D_0 and b, it is thought that the variations in equation (2) can be frequently made to conform quite well to those encountered in practice, for example, in gear teeth.

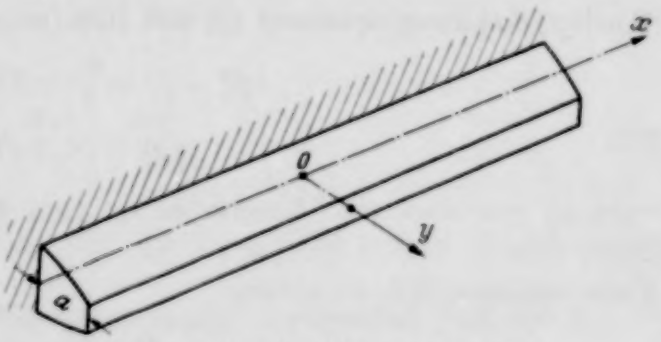


Abb. 1. Infinite Plate of Varying Thickness.

Substituting the function (2) in equation (1), it follows that

$$\Delta\Delta\omega + 2b\frac{\partial}{\partial y}\Delta\omega + b^2\Delta\omega - b^2(1-\nu)\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = 0\,. \qquad (3)$$

Consider, for example, the periodic loading along the free edge whose intensity, Q, per unit length is given by the equation

$$Q = P\cos\gamma x\,. \qquad (4)$$

It will be shown that the deflection of the plate can be written in the form

$$\omega = F(y)\cos\gamma x\,. \qquad (5)$$

where $F(y)$ is a function only of y. Substitution of the value (5) in equation (3) then gives the differential equation for $F(y)$ as follows

$$F^{IV} + 2bF^{III} + (b^2 - 2\gamma^2)F'' - 2b\gamma^2 F' + (\gamma^4 - \nu b^2\gamma^2)F = 0\,. \qquad (6)$$

For solutions of the form $F = Ae^{\lambda y}$, the characteristic equation is

$$\lambda^4 + 2b\lambda^3 + (b^2 - 2\gamma^2)\lambda^2 - 2b\gamma^2\lambda + (\gamma^4 - \nu b^2\gamma^2) = 0 \qquad (7)$$

---

[1] *C. W. MacGregor*, Mechanical Engineering **57** (1935) p. 225.
[2] *E. Bittner*, Momententafeln und Einflußflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten, Wien 1938.
[3] *T. J. Jaramillo*, J. Appl. Mech., Trans. ASME **72** (1950) p. 67.
[4] *W. T. Koiter* and *J. B. Alblas*, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetens., 57 B (1954) pp. 250, 259, 549.
[5] *D. L. Holl*, J. Appl. Mech. **4** (1937) 8.
[6] *S. Timoshenko*, Theory of Plates and Shells, p. 195, New York 1940.

and the problem is then one of extracting the four roots of this quartic. We write equation (7) in the form

$$(\lambda + \alpha_1 + \beta_1)(\lambda + \alpha_1 - \beta_1)(\lambda + \alpha_2 + \beta_2)(\lambda + \alpha_2 - \beta_2) = 0 \tag{8}$$

which, on multiplication gives

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^4 + 2\lambda^3(\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2) + \\ &+ \lambda(2\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2^2 - 2\alpha_2\beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_2^2) + \\ &+ (\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\alpha_2^2 - \beta_2^2) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Comparing the coefficients of λ^3 in equations (7) and (9) we note that

$$\alpha_1 + \alpha_2 = b \tag{10}$$

and equation (9) becomes

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^4 + 2b\lambda^3 + \lambda^2(b^2 + 2\alpha_1\alpha_2 - \beta_1^2 - \beta_2^2) + \lambda(2\alpha_1\alpha_2 b - 2\alpha_2\beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_2^2) + \\ &+ (\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\alpha_2^2 - \beta_2^2) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Comparing next the coefficients of λ^2 and λ in equation (11) with the corresponding ones in equation (7) we see that

$$\alpha_1 = \alpha_2 = b/2 \tag{12}$$

and thus equation (11) becomes

$$\lambda^4 + 2b\lambda^3 + \lambda^2\left(b^2 + \frac{b^2}{2} - \beta_1^2 - \beta_2^2\right) + \lambda\left[\frac{b^3}{2} - b(\beta_1^2 + \beta_2^2)\right] + \left(\frac{b^2}{4} - \beta_1^2\right)\left(\frac{b^2}{4} - \beta_2^2\right) = 0\,. \tag{13}$$

Finally comparing equations (7) and (13), we see that they are identical provided

$$\left.\begin{aligned} \beta_1^2 + \beta_2^2 &= \frac{b^2}{2} + 2\gamma^2\,, \\ \beta_1^2\beta_2^2 &= \gamma^4 - \nu b^2\gamma^2 + \frac{b^2\gamma^2}{2} + \frac{b^4}{16} \\ &= \left(\gamma^2 + \frac{b^2}{4}\right)^2 - \nu b^2\gamma^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

From equation (14) we obtain

$$\left.\begin{aligned} \beta_1^2 &= \frac{b^2}{4} + \gamma^2 + b\gamma\sqrt{\nu}\,, \\ \beta_2^2 &= \frac{b^2}{4} + \gamma^2 - b\gamma\sqrt{\nu} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

and these, together with equation (12) provide the roots of equation (7) which are then

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4\gamma^2 + 4b\gamma\sqrt{\nu}}\,, \\ \lambda_2 &= -\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4\gamma^2 + 4b\gamma\sqrt{\nu}}\,, \\ \lambda_3 &= -\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4\gamma^2 - 4b\gamma\sqrt{\nu}}\,, \\ \lambda_4 &= -\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4\gamma^2 - 4b\gamma\sqrt{\nu}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

For $\nu = 0.25$, which is an appropriate value for several materials, including steel, we obtain

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4\gamma^2 + 2\gamma b}\,, \\ \lambda_2 &= -\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4\gamma^2 + 2\gamma b}\,, \\ \lambda_3 &= -\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4\gamma^2 - 2\gamma b}\,, \\ \lambda_4 &= -\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4\gamma^2 - 2\gamma b}\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

The deflection of the plate is then given by

$$\omega = (A e^{\lambda_1 y} + B e^{\lambda_2 y} + C e^{\lambda_3 y} + D e^{\lambda_4 y}) \cos \gamma x \tag{18}$$

where A, B, C and D are found from the boundary conditions on the two longer sides, which are

$$\left.\begin{aligned} &y = 0,\ w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,, \\ &y = a,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, -D_0 e^{ba}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + [2-\nu]\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right) = P\cos\gamma x\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

It will be seen that the solution given in equation (18) is also valid for a plate bent by a corresponding distribution of moments applied to the free edge of the plate. Further, for any periodic distribution of normal forces and moments which can be expanded in a *Fourier* cosine series, the deflected form is readily obtained in the form of a *Fourier* cosine series. Similar solutions in *Fourier* sine series are obtainable and the general problem of periodic loading is formally solved. Of course, this solution applies only to the region remote from the shorter sides of the plate, since we are ignoring the boundary conditions on these sides.

3. Numerical Example. As a numerical example, we write $\gamma = \pi/2a$ and consequently the loading intensity along the free edge is $Q = P\cos(\pi x/2a)$. The thickness constant b is chosen as $-2.07944/a$, thus making the plate thickness at the loaded edge half of that at the clamped edge.

Assuming $\nu = 0.25$, we find from equations (17) that

$$\lambda_1 a = -0.34420,\quad \lambda_2 a = 2.42364,\quad \lambda_3 a = -1.23658,\quad \lambda_4 a = 3.31602\,. \tag{20}$$

The constants in equation (18) determined by boundary conditions in equation (19) are then found to be

$$A = -0.13903\ Pa^3/D_0,\ B = 0.05488\ Pa^3/D_0,\ C = 0.10102\ Pa^3/D_0,\ D = -0.01687\ Pa^3/D_0\,. \tag{21}$$

The deflection along the loaded edge is finally

$$w_{y=a} = 0.08536\ \frac{Pa^3}{D_0}\cos\frac{\pi x}{2a}\,. \tag{22}$$

4. Conclusion. It will be seen that the deflection and moment M_x are both zero on edges $x = \pm a,\ \pm 3a,\ \ldots$ Hence the above solution is also valid for a plate of finite length simply supported on any two of these edges.

So far as the variable thickness version of *MacGregor's* single concentrated load case is concerned, the loading is written in the *Fourier* integral form

$$Q_{y=a} = \frac{P}{\pi a}\int_0^\infty \cos\gamma x\, d(\gamma a) \tag{23}$$

and the deflections are given by the *Fourier* integral

$$w = \frac{1}{a}\int_0^\infty (A_1 e^{\lambda_1 y} + B_1 e^{\lambda_2 y} + C_1 e^{\lambda_3 y} + D_1 e^{\lambda_4 y})\cos\gamma x\, d(\gamma a)\,. \tag{24}$$

The evaluation of this integral must be performed numerically after the value of the thickness constant b has been selected to best fit the actual variation. This may be done by computing the integrand over a certain range for various values of γa and evaluating the integral in this range by *Simpson's* rule.

Beyond this range, the integrand may be written in simpler form and the integral evaluated in closed form. This involves considerable labor and, since the calculations must be repeated for each value of b selected, they will not be made here. Numerical calculations of *Fourier* integrals such as the above have been made by *Girkmann*[7] and the author[8].

(Eingegangen am 25. Juni 1957.)

Anschrift des Verfassers: Professor *H. D. Conway*, Thurston Hall, Cornell University, Ithaca (New York) USA.

[7] *K. Girkmann*, Ing.-Arch. **13** (1943) p. 273.
[8] *H. D. Conway*, J. Appl. Mech. **22** (1955) p. 353.

Mathematische Behandlung gesteuerter Abkühl- und Anwärmvorgänge

Von H. Jäckel

1. Einleitung. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Lösung des allgemeinsten gesteuerten Wärmeleitproblems in festen Körpern, die bezüglich der Wärmeleitfähigkeit isotrop und homogen sind. Dieses Problem ist dadurch gekennzeichnet, daß verschiedene Teiloberflächen eines Körpers, dessen Temperaturverteilung zu bestimmen ist, von Medien umgeben werden, deren Temperaturen irgendwelche Funktionen des Ortes und der Zeit sind. Hinzu kommt noch, daß im Körper selbst innere Wärme entwickelt werden kann.

Die Untersuchung derartiger Probleme findet man erstmals in einer Abhandlung von *J. M. C. Duhamel*[1]. Ohne jedoch die dort in drei längeren Abschnitten ausgeführten Gedankengänge zu benutzen, soll im Folgenden ein anderer Weg beschritten werden, der durch eine Arbeit von *A. Kneschke*[2] nahegelegt wird. In dieser ist unter Verwendung einer Einflußfunktion ein Theorem zur Ermittlung der Temperaturverteilung eines Körpers mit konstanter Anfangstemperatur und einer lediglich von der Zeit abhängigen Temperaturfunktion des die gesamte Körperoberfläche umgebenden Mediums abgeleitet. Dieses Theorem, insbesondere der Begriff der Einflußfunktion, ist nun einer solchen Erweiterung fähig, daß die Lösung der allgemeinsten Aufgabe gelingt.

Abgesehen von der einfachen physikalischen Interpretation, die sowohl die Einflußfunktion als auch der Lösungsansatz gestatten, sind die Ergebnisse leicht zu überschauen und für den Praktiker bequem zu handhaben. Darüber hinaus liefert das Theorem nicht nur, wie etwa die bei *H. S. Carslaw*[3] angegebene allgemeine analytische Fassung der *Duhamel*schen Gedankengänge, die Lösung für das Körperinnere, sondern sie gilt auch auf der Körperoberfläche. Dies ist für die Behandlung technischer Probleme, bei denen die Temperatur auf der Begrenzung des Körpers eine Rolle spielt, von Bedeutung. Schließlich können aus der allgemeinen Lösung ohne Schwierigkeit beliebige spezielle Ergebnisse abgeleitet werden.

Zur Erläuterung der Theorie werden ein Wärmeleitvorgang in einem Kreiszylinder und die Temperaturverteilung in einem Betonquader während des chemischen Abbindeprozesses behandelt.

2. Formulierung der Aufgabe. a) Probleme ohne innere Wärmeentwicklung. Wir betrachten einen hinsichtlich der Wärmeleitfähigkeit isotropen und homogenen Körper K, dessen Gesamtoberfläche F sei. Seine Temperatur zur Zeit $t=0$ bezeichnen wir mit $f(P)$. Dabei ist unter P irgendein Punkt von K zu verstehen. Die Gesamtoberfläche F bestehe aus r Teilflächen F_k ($k=1, 2, ..., r$). Die Temperatur Φ_k der Grenzschicht des die Teilfläche F_k umgebenden Mediums ändere sich mit der Zeit t und dem Ort P, also $\Phi_k = \Phi_k(P, t)$. Die $\Phi_k(P, t)$ werden Steuerfunktionen genannt, weil sie die gesuchte Temperatur $T(P, t)$ des Körpers wesentlich beeinflussen.

Setzen wir *Fourier*sche Wärmeleitung voraus, so muß $T(P, t)$ in K der Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \Delta T = D\{T(P,t)\} = 0 \tag{1}$$

genügen. Dabei bezeichnet Δ den auf die Ortskoordinaten anzuwendenden *Laplace*schen Operator und a^2 die Temperaturleitzahl des Körpers.

Die Randbedingungen können, entsprechend der Problemstellung, verschiedener Art sein. Wir wählen sie in der bekannten, relativ allgemeinen Form

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha_k}\frac{\partial T}{\partial n} + T\right)_{F_k} \equiv L\{T(P,t)\}_{F_k} = \Phi_k(P,t)\,, \tag{2}$$

mit n als äußerer Normalenrichtung, λ als Wärmeleitzahl und α_k als Wärmeübergangszahlen.

[1] *J. M. C. Duhamel*, J. Éc. polytech., Paris, 14 (1833), S. 20
[2] *A. Kneschke*, Ing.-Arch. 24 (1956) S. 77.
[3] *H. S. Carslaw* und *J. C. Jaeger*, Conductions of heat in solids, S. 19, Oxford 1947.

Sind die Teiloberflächen F_k mit der Temperatur $\Phi_k(P,t)$ isotherm ($\alpha_k \to \infty$), so geht (2) über in

$$(T)_{F_k} = \Phi_k(P,t). \tag{3}$$

Im Falle adiathermaner Abgrenzung ($\alpha_k = 0$) ergibt sich

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{F_k} = 0. \tag{4}$$

Die Anfangstemperaturverteilung $T(P,0)$ ist durch $f(P)$ gegeben. Sie wird die vorgeschriebenen Randbedingungen im allgemeinen nicht erfüllen. Deshalb wollen wir von der gesuchten Temperaturverteilung $T(P,t)$ nur verlangen, daß $T(P,0)$ im Inneren von K mit $f(P)$ übereinstimmt, während $T(P,t)$ für jede Zeit $t > 0$ die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllen soll.

Nunmehr kann die gesuchte Temperaturfunktion $T(P,t)$ aus folgendem Randwertproblem bestimmt werden

$$\left.\begin{aligned} &D\{T(P,t)\} = 0\,, \quad T(P,0) = f(P)\,, \\ &L\{T(P,t)\}_{F_k} = \Phi_k(P,t) \quad \text{für} \quad t > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

b) **Probleme mit innerer Wärmeentwicklung.** Wir haben bisher angenommen, daß im Inneren des Körpers keine Wärme erzeugt wird. Diese Voraussetzung lassen wir jetzt fallen und bezeichnen mit $W(P,t)$ die im Körper in der Volumen- und Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge, mit $\bar{T}(P,t)$ seine Temperatur, mit $\bar{\Phi}_k(P,t)$ die Steuerfunktionen und mit $\bar{f}(P)$ die Anfangstemperaturverteilung. Die Aufgabe lautet dann bekanntlich

$$\left.\begin{aligned} &D\{\bar{T}(P,t)\} = \frac{W(P,t)}{c\,\varrho}\,, \quad \bar{T}(P,0) = \bar{f}(P)\,, \\ &L\{\bar{T}(P,t)\}_{F_k} = \bar{\Phi}_k(P,t) \quad \text{für} \quad t > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r)\,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wobei c die spezifische Wärme und ϱ die Dichte des Körpers ist. Das inhomogene Problem (6) kann in bekannter Weise durch den Ansatz

$$\bar{T}(P,t) = T(P,t) + U(P,t) \tag{7}$$

auf das halbhomogene (5) zurückgeführt werden, wobei $U(P,t)$ ein partikuläres Integral der inhomogenen Differentialgleichung ist. Es wird dann

$$f(P) = \bar{f}(P) - U(P,0)$$

und

$$\Phi_k(P,t) = \bar{\Phi}_k(P,t) - L\{U(P,t)\}_{F_k}.$$

Gilt insbesondere $\bar{\Phi}_k(P,t) = 0$ in (6), so wird diesem zunächst ungesteuerten Problem durch (7) ein gesteuertes, halbhomogenes Problem der Form (5) zugeordnet. Es genügt deshalb, wenn wir uns im Folgenden mit der Lösung der Randwertaufgabe (5) beschäftigen.

3. Lösung des Randwertproblems. Zunächst setzen wir voraus, daß von sämtlichen vorkommenden Funktionen die ersten und zweiten Ableitungen nach den Ortskoordinaten sowie die erste Ableitung nach der Zeit und dem später auftretenden Parameter τ für alle in Betracht kommenden Werte der unabhängigen Veränderlichen existieren, endlich und stetig sind. Diese an die einzelnen Funktionen gestellten Bedingungen können zum Teil noch abgeschwächt werden, worauf wir hier jedoch nicht weiter eingehen wollen.

Wegen der Linearität der Differentialgleichung und der Randbedingungen in (5) ist für $T(P,t)$ der Ansatz möglich

$$T(P,t) = T_0(P,t) + T_1(P,t)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} &D\{T_0(P,t)\} = 0\,, \quad T_0(P,0) = f(P)\,, \\ &L\{T_0(P,t)\}_F = 0 \quad \text{für} \quad t > 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und

$$\left.\begin{aligned} &D\{T_1(P,t)\} = 0\,, \quad T_1(P,0) = 0\,, \\ &L\{T_1(P,t)\}_{F_k} = \Phi_k(P,t) \quad \text{für} \quad t > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die Lösung des vollhomogenen Problems (8) ist bekannt[1]. Sie lautet

$$\left.\begin{aligned} T_0(P,t) &= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2 t}\,, \\ A_\mu &= \int_K f(P)\, u_\mu(P)\, dv\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Dabei sind die $u_\mu(P)$ die normierten Eigenfunktionen der Randwertaufgabe

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(P) + \delta^2 u(P) = 0\,, \\ &L\{u(P)\}_F = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und die δ_μ^2 die entsprechenden Eigenwerte. Auf (11) wird man durch den *Bernoulli*schen Produktansatz $T_0(P,t) = u(P)e^{-a^2\delta^2 t}$ geführt.

Um $T_1(P,t)$ aus (9) zu bestimmen, betrachten wir zunächst folgendes Teilproblem für $1 \leqq k \leqq r$:

$$\left.\begin{aligned} &D\{T_{1k}(P,t)\} = 0\,, \quad T_{1k}(P,0) = 0 \\ &L\{T_{1k}(P,t)\}_{F_i} = \delta_{ik}\,\Phi_k(P,t) \quad \text{für} \quad t > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r)\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dabei ist $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$ und $\delta_{ik} = 1$ für $i = k$. Offenbar gilt dann

$$T_1(P,t) = \sum_{k=1}^{r} T_{1k}(P,t)\,. \tag{13}$$

Deshalb genügt es, (12) für beliebiges k allgemein zu lösen. Zu diesem Zweck wird vorerst angenommen, es sei diejenige Funktion G_k^* bekannt, die für jeden beliebigen Punkt P des Körpers K die Temperatur wiedergibt, die unter dem Einfluß der auf die Teiloberflächen F_k wirkenden Außentemperaturen $\delta_{ik}\Phi_k(P,\tau)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ im Laufe der Zeit $t - \tau > 0$ entstanden ist. G_k^* ist eine Einflußfunktion, die in spezieller Form erstmals von *A. Kneschke* zur Lösung bestimmter Wärmeleitprobleme verwendet wurde. Sie hängt vom Ort, von dem früheren Zeitpunkt τ und der Zeitdifferenz $t - \tau$ ab, also

$$G_k^* = G_k^*(P, \tau, t-\tau)\,.$$

Nunmehr ist es möglich, einen physikalisch sehr naheliegenden Ansatz für $T_{1k}(P,t)$ anzugeben und aus diesem in Verbindung mit (12) G_k^* zu bestimmen. $T_{1k}(P,t)$ setzt sich nämlich zusammen aus der Temperatur $G_k^*(P,0,t)$, die von $\Phi_k(P,0)$ herrührt und der Summe aller Temperaturänderungen

$$\int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} G_k^*(P,\tilde{\tau}, t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau\,,$$

die durch $\Phi_k(P,\tau)$ während der Zeit von $\tau = 0$ bis $\tau = t$ hervorgerufen wurden. In den angeführten zwei Termen ist jedoch bereits die Temperatur mit enthalten, die zur Zeit $\tau = t$, verursacht durch $\Phi_k(P,t)$, erst wirksam wird. Demzufolge muß noch $G_k^*(P,t,0)$ subtrahiert werden. Also ergibt sich schließlich

$$T_{1k}(P,t) = G_k^*(P,0,t) + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} G_k^*(P,\tilde{\tau}, t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau - G_k^*(P,t,0)\,. \tag{14}$$

Da $T_{1k}(P,t)$ Lösung von (12) sein soll, bietet sich uns unmittelbar eine Möglichkeit, G_k^* zu bestimmen.

Wir bilden zuerst mit dem Ansatz (14)

$$D\{T_{1k}(P,t)\} = D\{G_k^*(P,0,t)\} + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} D\{G_k^*(P,\tilde{\tau}, t-\tau)\}\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau + \left(\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} G_k^*(P,\tilde{\tau}, t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau}\right)_{\tau=t}$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} G_k^*(P,t,0) + a^2 \Delta G_k^*(P,t,0) = 0\,.$$

[1] *R. Courant* u. *D. Hilbert*, Methods of Mathematical Physics. New York und London 1953, Bd. 1.

Beachtet man, daß

$$\left(\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} G_k^*(P, \tilde{\tau}, t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau}\right)_{\tau=t} = \frac{\partial}{\partial t} G_k^*(P, t, 0)$$

ist und aus $D\{G_k^*(P, \tau, t)\} = 0$ für $0 \leqq \tau < t$ auch $D\{G_k^*(P, 0, t)\} = 0$ und $D\{G_k^*(P, \tau, t-\tau)\} = 0$ folgt, so ist die Differentialgleichung offensichtlich erfüllt, wenn gilt

$$\Delta G_k^*(P, t, 0) = 0\,, \qquad D\{G_k^*(P, \tau, t)\} = 0\,.$$

Weiter ergibt sich aus den Randbedingungen

$$L\{T_{1k}(P, t)\}_{F_i} = L\{G_k^*(P, 0, t)\}_{F_i} + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} L\{G_k^*(P, \tilde{\tau}, t-\tau)\}_{F_i}\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau$$
$$- L\{G_k^*(P, t, 0)\}_{F_i} = \delta_{ik}\, \Phi_k(P, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

Diese werden befriedigt durch die Forderung

$$L\{G_k^*(P, t, 0)\}_{F_i} = -\delta_{ik}\, \Phi_k(P, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$
$$L\{G_k^*(P, \tau, t)\}_F = 0 \quad \text{für} \quad t > 0\,.$$

Schließlich ersieht man aus (14) sofort, daß die Anfangsbedingung $T_{1k}(P, 0) = 0$ in K erfüllt ist.

Damit ist $G_k^*(P, \tau, t)$ und folglich auch $G_k^*(P, \tau, t-\tau)$ bestimmt. Es kann aus nachstehenden zwei Randwertaufgaben, deren Lösungsmethoden bekannt sind, berechnet werden.

Zuerst ermitteln wir aus

$$\left.\begin{aligned} &\Delta H_k(P, t) = 0\,, \\ &L\{H_k(P, t)\}_{F_i} = -\delta_{ik}\, \Phi_k(P, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

eine Funktion $H_k(P, t)$. Danach setzen wir

$$G_k^*(P, \tau, 0) = H_k(P, \tau)$$

und bestimmen aus

$$\left.\begin{aligned} &D\{G_k^*(P, \tau, t)\} = 0\,, \quad G_k^*(P, \tau, 0) = H_k(P, \tau)\,, \\ &L\{G_k^*(P, \tau, t)\}_F = 0 \quad \text{für} \quad t > 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

die gesuchte Funktion $G_k(P, \tau, t)$.

Die Aufgabe (15) kann als ein von einem Parameter t abhängiges stationäres Problem gedeutet werden, während (16) ein von dem Parameter τ abhängiges vollhomogenes Wärmeleitproblem darstellt. Entsprechend (10) erhalten wir für $G_k^*(P, \tau, t)$

$$G_k^*(P, \tau, t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^{(k)}(\tau)\, u_\mu(P)\, e^{-a^2 \delta_\mu^2 t}\,,$$

$$B_\mu^{(k)}(\tau) = \int_K H_k(P, \tau)\, u_\mu(P)\, dv\,.$$

Aus (17) ist ersichtlich, daß $G_k^*(P, \tau, 0)$ gleich der Entwicklung von $H_k(P, \tau)$ nach den Eigenlösungen des Problems (16) wird. Diese Entwicklung stimmt aber nur im Inneren von K mit $H_k(P, \tau)$ überein. Auf der Körperoberfläche genügt sie den Randbedingungen von (16) und nicht den in (15) geforderten. Wir schreiben deshalb unseren Ansatz (12) in der Form

$$T_{1k}(P, t) = G_k^*(P, 0, t) + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} G_k^*(P, \tilde{\tau}, t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau - H_k(P, t) \tag{18}$$

und wollen künftig mit $H_k(P, t)$ immer die Lösung des Problems (15) und mit $G_k^*(P, \tau, 0)$ die Entwicklung von $H_k(P, \tau)$ nach den Eigenlösungen von (16) bezeichnen. Unter Berücksichtigung dieser letzten Bemerkung überzeugt man sich leicht, daß die durch (18) gegebene Temperaturfunktion $T_{1k}(P, t)$ tatsächlich die Lösung des Problems (9) ist, insbesondere erfüllt sie die geforderten Randbedingungen, gilt also auch auf der Körperoberfläche.

Damit haben wir das allgemeine, gesteuerte Wärmeleitproblem (5) auf folgende Teilaufgaben, deren Lösungsmethoden bekannt sind, zurückgeführt:

das vollhomogene Problem	(8),
die r stationären Probleme	(15),
die r vollhomogenen Probleme	(16),
die einfachen Integrationen	(18).

und $T(P,t)$ hat die Form

$$T(P,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \sum_{k=1}^{r}\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^{(k)}(0)\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{dB_\mu^{(k)}(\tau)}{d\tau}\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)}\, d\tau - H_k(P,t)\right]. \quad (19)$$

Die Eindeutigkeit der Lösung (19) des Rapdwertproblems (5) leuchtet physikalisch unmittelbar ein, sie bedarf jedoch des mathematischen Beweises. Wir verweisen diesbezüglich auf die Literatur [1].

Durch partielle Integration kann die Lösung (19) auf folgende, bisweilen vorteilhaftere Form gebracht werden:

$$T(P,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2 t} - a^2 \int_0^t \sum_{k=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^{(k)}(\tau)\, u_\mu(P)\, \delta_\mu^2\, e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)}\, d\tau + \sum_{k=1}^{r}\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^{(k)}(t)\, u_\mu(P) - H_k(P,t)\right]. \quad (20)$$

Da der letzte Term für alle inneren Punkte von K Null wird, ist (20) besonders gut zur Bestimmung der Temperatur dieser Punkte geeignet.

Wir bemerken noch, daß aus (20) für $f(P) = 0$ und $L\{T(P,t)\}_F = \Phi(P,t)$ das *Duhamel*sche Integraltheorem in der bei *H. S. Carslaw* angegebenen analytischen Form resultiert. Unter den eben angeführten Bedingungen folgt nämlich entsprechend (20) für die Temperaturverteilung $T(P,t)$ im Inneren des Körpers K

$$T(P,t) = -a^2 \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(\tau)\, u_\mu(P)\, \delta_\mu^2\, e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)}\, d\tau = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(\tau)\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)}\, d\tau .$$

Das ist aber das *Duhamel*sche Integraltheorem. Es gilt im Gegensatz zu der allgemeinen Lösung (19) nur im Inneren des Körpers K.

4. Spezielle gesteuerte Probleme. Aus der allgemeinen Lösung (19) kann nunmehr in Verbindung mit (8), (15), (16) und (18) durch geeignete Wahl der $\Phi_k(P,t)$ eine ganze Reihe spezielle Ergebnisse abgeleitet werden, von denen wir jetzt einige nennen wollen.

a) Hat die Steuerfunktion die Form

$$\Phi_k(P,t) = \chi_k(P)\, \varphi_k(t)$$

für die Teilflächen F_k, dann setzen wir

$$G_k^*(P,\tau,t-\tau) = \varphi_k(\tau)\, G_k(P,t-\tau) .$$

Damit ergibt sich aus (18)

$$T_{1k}(P,t) = \varphi_k(0)\, G_k(P,t) + \int_0^t \varphi_k'(\tau)\, G_k(P,t-\tau)\, d\tau - \varphi_k(t)\, H_k(P), \quad (21)$$

wobei $\varphi_k'(\tau) = \frac{d}{d\tau}\varphi_k(\tau)$ ist.

---

[1] *H. S. Carslaw* u. *J. C. Jaeger*, a. a. O. S. 24.

Die $H_k(P)$ und $G_k(P,t)$ $(k=1,2,\ldots,r)$ sind bestimmt durch

$$\left.\begin{aligned} &\Delta H_k(P)=0\,,\\ &L\{H_k(P)\}_{F_i}=-\delta_{ik}\,\chi_k(P) \qquad (i=1,2,\ldots,r)\,, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} &D\{G_k(P,t)\}=0\,, \quad G_k(P,0)=H_k(P)\,,\\ &L\{G_k(P,t)\}_F=0 \qquad \text{für} \qquad t>0\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Die Aufgaben (22), (23) unterscheiden sich von (15), (16) dadurch, daß jetzt die Randwertprobleme nicht mehr parameterabhängig sind. Für $T(P,t)$ folgt somit entsprechend (19)

$$T(P,t)=\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\left[\varphi_k(0)\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^{(k)}\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2 t}+\int_0^t \varphi_k'(\tau)\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^{(k)}\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)}\,d\tau-\varphi_k(t)\,H_k(P)\right]. \tag{24}$$

Der Fall, daß die Steuerfunktion für die gesamte Oberfläche F gleich $\chi(P)\,\varphi(t)$ ist, kann aus (21), (22), (23), (24) unmittelbar abgelesen werden.

b) Sind die Steuerfunktionen nicht ortsabhängig, also

$$\Phi_k(P,t)=\varphi_k(t)\,,$$

dann brauchen wir in a) nur $\chi_k(P)\equiv 1$ zu setzen. Die allgemeine Lösung dieses Problems ist daher ebenfalls von der Form (24). Sind in a) die $\varphi_k(t)\equiv 1$, so ergibt sich die bekannte Lösung für nur ortsabhängige Temperaturfunktionen der umgebenden Medien.

c) Ist schließlich die Steuerfunktion durch $\varphi(t)$ für die Gesamtoberfläche F gegeben, so folgt

$$T_1(P,t)=\varphi(0)\,G(P,t)+\int_0^t \varphi'(\tau)\,G(P,t-\tau)\,d\tau-\varphi(t)\,H(P) \tag{25}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} &\Delta H(P)=0\,,\\ &L\{H(P)\}=-1 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

und

$$\left.\begin{aligned} &D\{G(P,t)\}=0\,, \quad G(P,0)=H(P)\,,\\ &L\{G(P,t)\}_F=0 \qquad \text{für} \qquad t>0\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Das stationäre Problem (26) hat die einfache Lösung

$$H(P)=-1\,,$$

daher wird

$$T(P,t)=\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2 t}+\varphi(0)\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$+\int_0^t \varphi'(\tau)\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)}\,d\tau+\varphi(t)\,. \tag{28}$$

Setzen wir noch $T(P,0)=f(P)=\varphi(0)=T_a=\text{konst.}$ (völliger Wärmeausgleich zu Beginn des Prozesses), dann liefert ein Vergleich von

$$\left.\begin{aligned} &D\{T_0(P,t)\}=0\,, \quad T_0(P,0)=T_a\,,\\ &L\{T_0(P,t)\}_F=0 \qquad \text{für} \qquad t>0 \end{aligned}\right.$$

und

$$\left.\begin{aligned} &D\{G(P,t)\}=0\,, \quad G(P,0)=-1\\ &L\{G(P,t)\}_F=0 \qquad \text{für} \qquad t>0 \end{aligned}\right.$$

sofort

$$T_a\cdot G(P,t)=-T_0(P,t)\,.$$

Wir erhalten demzufolge nach (28)

$$T(P,t) = \varphi(t) + \int_0^t \varphi'(\tau) \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)}\, d\tau\,. \tag{29}$$

Das ist aber das Ergebnis von *A. Kneschke*.

Damit haben wir eine Fülle von technisch anwendbaren, gesteuerten Wärmeleitproblemen erfaßt und einer analytischen Behandlung zugänglich gemacht. Die Lösungen gelten sowohl für Anwärm- als auch für Abkühlvorgänge, da die $\Phi_k(P,t)$ diesbezüglich in keiner Weise eingeschränkt werden mußten. Daß die theoretischen Ergebnisse tatsächlich bei der Behandlung praktischer Aufgaben von Nutzen sind, werden wir sogleich an den Beispielen erkennen.

5. Beispiele. a) Temperaturverteilung in einem Zylinder. Es ist die Temperaturverteilung in einem Vollzylinder mit der Anfangstemperatur $f(r,z)$, dem Halbmesser R und der Länge l zu bestimmen. Die Grenzschicht des den Mantel umgebenden Mediums habe die Temperatur $\Phi(z,t)$ (Wärmeübergangszahl α). Die Grundfläche des Zylinders werde adiatherman abgegrenzt, während die Grenzschicht des die Deckfläche umgebenden Mediums die Temperatur $\chi(r)\,\varphi(t)$ haben soll (Wärmeübergangszahl α').

Verwenden wir Zylinderkoordinaten (r,φ,z), so liegt entsprechend der Aufgabenstellung folgendes Randwertproblem vor:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = 0\,, \qquad T(r,z,0) = f(r,z)\,,\\ &\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial r} + T\right)_{r=R} = \Phi(z,t)\,, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=0} = 0\,,\\ &\left(\frac{\lambda}{\alpha'}\frac{\partial T}{\partial z} + T\right)_{z=l} = \chi(r)\,\varphi(t)\,, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \end{aligned}\right\} \text{für } t > 0\,.$$

Um dieses zu lösen, berechnen wir zunächst nach (8) $T_0(r,z,t)$ aus

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T_0}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}\right) = 0\,, \qquad T_0(r,z,0) = f(r,z)\,,\\ &\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T_0}{\partial r} + T_0\right)_{r=R} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial T_0}{\partial r}\right)_{r=0} = 0\,,\\ &\left(\frac{\lambda}{\alpha'}\frac{\partial T_0}{\partial z} + T_0\right)_{z=l} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial T_0}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \end{aligned}\right\} \text{für } t > 0\,.$$

Mittels des *Bernoulli*schen Produktansatzes ergibt sich in bekannter Weise

$$T_0(r,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}\, J_0(h_m r)\cos k_n z\, e^{-a^2\left(h_m^2 + k_n^2\right)t}$$

mit

$$A_{m,n} = \frac{4\int_0^R\int_0^l f(r,z)\, r\, J_0(h_m r)\cos k_n z\, dr\, dz}{R^2\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}h_m\right)^2 + 1\right]\left[l + \frac{\lambda}{\alpha'}\sin^2 k_n l\right] J_1^2(h_m R)}\,.$$

Die h_m bzw. k_n sind die Wurzeln der Eigenwertgleichungen

$$\frac{J_0(h\,R)}{J_1(h\,R)} = \frac{\lambda}{\alpha R}\,h\,R\,, \qquad \operatorname{ctg} k\,l = \frac{\lambda}{\alpha' l}\,k\,l\,.$$

Unter J_0 und J_1 sind die *Bessel*funktionen nullter bzw. erster Ordnung zu verstehen. Die für das Folgende erforderlichen Relationen zwischen diesen Funktionen findet man in der Literatur[1].

[1] *G. N. Watson*, A Treatise on the Theory of *Bessel* Functions. Cambridge 1952.

Nun bestimmen wir die stationären Probleme. Da die Steuerfunktion für die Grundfläche identisch Null ist, sind nur zwei derartige Aufgaben zu lösen. Es ergibt sich für $H_1(r, z, t)$ nach (15)

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} = 0\,,$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial H_1}{\partial r} + H_1\right)_{r=R} = -\,\Phi(z, t)\,, \qquad \left(\frac{\partial H_1}{\partial r}\right)_{r=0} = 0\,,$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha'}\frac{\partial H_1}{\partial z} + H_1\right)_{z=l} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial H_1}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$$

und daraus

$$H_1(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n(t)\, J_0(i\,k_n\, r)\cos k_n\, z}{\frac{\lambda}{\alpha}\, i\,k_n\, J_1(i\,k_n\, R) - J_0(i\,k_n\, R)}$$

mit $i = \sqrt{-1}$ und

$$C_n(t) = \frac{2\int_0^l \Phi(z, t)\cos k_n\, z\, dz}{l + \frac{\lambda}{\alpha'}\sin^2 k_n\, l}\,.$$

Die zur Deckfläche gehörige Steuerfunktion hat die spezielle Form $\chi(r)\,\varphi(t)$. Deshalb hängt H_2 nicht von dem Parameter t ab. Entsprechend (22) folgt für $H_2(r, z)$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} = 0\,,$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial H_2}{\partial r} + H_2\right)_{r=R} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial H_2}{\partial r}\right)_{r=0} = 0\,,$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha'}\frac{\partial H_2}{\partial z} + H_2\right)_{z=l} = -\,\chi(r)\,, \quad \left(\frac{\partial H_2}{\partial z}\right)_{z=0} = 0\,.$$

Wir erhalten

$$H_2(r, z) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m\, J_0(h_m\, r)\cosh(h_m\, z)}{\frac{\lambda}{\alpha'}\, h_m \sinh(h_m\, l) + \cosh(h_m\, l)}$$

mit

$$D_m = \frac{2\int_0^R \chi(r)\, r\, J_0(h_m\, r)\, dr}{R^2\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}h_m\right)^2 + 1\right] J_1^2(h_m\, R)}\,.$$

Schließlich bestimmen wir $G_1^*(r, z, \tau, t)$ nach (16) aus

$$\frac{\partial G_1^*}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 G_1^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G_1^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 G_1^*}{\partial z^2}\right) = 0\,, \qquad G_1^*(r, z, \tau, 0) = H_1(r, z, \tau)\,,$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial G_1^*}{\partial r} + G_1^*\right)_{r=R} &= 0\,, & \left(\frac{\partial G_1^*}{\partial r}\right)_{r=0} &= 0\,, \\ \left(\frac{\lambda}{\alpha'}\frac{\partial G_1^*}{\partial z} + G_1^*\right)_{z=l} &= 0\,, & \left(\frac{\partial G_1^*}{\partial z}\right)_{z=0} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \text{ für } t > 0$$

und $G_2(r, z, t)$ nach (23) aus

$$\frac{\partial G_2}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial z^2}\right) = 0\,, \qquad G_2(r, z, 0) = H_2(r, z)\,,$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial G_2}{\partial r} + G_2\right)_{r=R} &= 0\,, & \left(\frac{\partial G_2}{\partial r}\right)_{r=0} &= 0\,, \\ \left(\frac{\lambda}{\alpha'}\frac{\partial G_2}{\partial z} + G_2\right)_{z=l} &= 0\,, & \left(\frac{\partial G_2}{\partial z}\right)_{z=0} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } t > 0\,.$$

Es wird

$$G_1^*(r, z, \tau, t) = -\frac{2}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n(\tau)\, h_m\, J_0(h_m\, r) \cos k_n\, z}{[h_m^2 + k_n^2]\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\, h_m\right)^2 + 1\right] J_1(h_m\, R)}\, e^{-a^2 (h_m^2 + k_n^2) t}$$

und

$$G_2(r, z, t) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_m\, k_n \sin k_n\, l\, J_0(h_m\, r) \cos k_n\, z}{[h_m^2 + k_n^2]\left[l + \frac{\lambda}{\alpha'} \sin^2 k_n\, l\right]}\, e^{-a^2 (h_m^2 + k_n^2) t}\,.$$

Wegen (18) ergibt sich somit

$$T_{11}(r, z, t) = -\frac{2}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n(0)\, h_m\, J_0(h_m\, r) \cos k_n\, z}{[h_m^2 + k_n^2]\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\, h_m\right)^2 + 1\right] J_1(h_m\, R)}\, e^{-a^2 (h_m^2 + k_n^2) t} -$$

$$-\frac{2}{R} \int_0^t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n'(\tau)\, h_m J_0(h_m\, r) \cos k_n\, z}{[h_m^2 + k_n^2]\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\, h_m\right)^2 + 1\right] J_1(h_m\, R)}\, e^{-a^2 (h_m^2 + k_n^2)(t-\tau)}\, d\tau -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n(t)\, J_0(i\, k_n\, r) \cos k_n\, z}{\frac{\lambda}{\alpha}\, i\, k_n\, J_1(i\, k_n\, R) - J_0(i\, k_n\, R)}$$

und wegen (21)

$$T_{12}(r, z, t) = -2\, \varphi(0) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_m\, k_n \sin k_n\, l\, J_0(h_m\, r) \cos k_n\, z}{[h_m^2 + k_n^2]\left[l + \frac{\lambda}{\alpha'} \sin^2 k_n\, l\right]}\, e^{-a^2 (h_m^2 + k_n^2) t} -$$

$$-2 \int_0^t \varphi'(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_m\, k_n \sin k_n\, l\, J_0(h_m\, r) \cos k_n\, z}{[h_m^2 + k_n^2]\left[l + \frac{\lambda}{\alpha'} \sin^2 k_n\, l\right]}\, e^{-a^2 (h_m^2 + k_n^2)(t-\tau)}\, d\tau +$$

$$+\varphi(t) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m\, J_0(h_m\, r) \cosh (h_m\, z)}{\frac{\lambda}{\alpha'}\, h_m \sinh (h_m\, l) + \cosh (h_m\, l)}\,.$$

Summieren wir nunmehr die errechneten Temperaturverteilungen entsprechend (19), dann erhalten wir die gesuchte Lösung unserer Aufgabe. Es ist also

$$T(r, z, t) = T_0(r, z, t) + T_{11}(r, z, t) + T_{12}(r, z, t)\,.$$

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, daß das Ergebnis in der Tat alle geforderten Bedingungen erfüllt.

b) Temperaturverteilung in einem Betonquader während des chemischen Abbindeprozesses. Es soll die Temperaturverteilung in einem Betonquader mit den Kantenlängen $2s_1$, $2s_2$, $2s_3$ während des chemischen Abbindeprozesses bestimmt werden, wenn die Anfangstemperatur T_a des Betons sowie die Temperatur des umgebenden Mediums konstant ist (Wärmeübergangszahl α).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Temperatur des umgebenden Mediums 0° beträgt. Für die je Volumen- und Zeiteinheit frei werdende Wärmemenge des Betons $W(x_1, x_2, x_3, t)$ wird die von *K. Hirschfeld*[1] angegebene Näherungsfunktion

$$W = W_{max}\, e^{-t/t_0}$$

verwendet, welche nur von der Zeit abhängig ist. W_{max} und t_0 sind hier nicht weiter interessierende Materialkonstanten.

[1] *K. Hirschfeld*, Die Temperaturverteilung im Beton. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1948.

Unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems (x_1, x_2, x_3) ist somit nach (6) folgende Randwertaufgabe zu lösen:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_3^2}\right) = \frac{W_{max}}{c\,\varrho} e^{-t/t_0}, \qquad \overline{T}(x_1, x_2, x_3, 0) = T_a,$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} + \overline{T}\right)_{x_i = s_i} &= 0, \\ \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} + \overline{T}\right)_{x_i = -s_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } t > 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Wir erkennen unmittelbar, daß

$$U(t) = -\frac{W_{max}}{c\,\varrho} t_0 e^{-t/t_0} = -\overline{W} t_0 e^{-t/t_0}$$

ein partikuläres Integral der inhomogenen Differentialgleichung ist. Entsprechend (7) liefert der Ansatz

$$\overline{T}(x_1, x_2, x_3, t) = T(x_1, x_2, x_3, t) - \overline{W} t_0 e^{-t/t_0}$$

das einfache gesteuerte Wärmeleitproblem

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}\right) = 0, \qquad T(x_1, x_2, x_3, 0) = T_a + \overline{W} t_0,$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x_i} + T\right)_{x_i = s_i} &= \overline{W} t_0 e^{-t/t_0}, \\ \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x_i} + T\right)_{x_i = -s_i} &= \overline{W} t_0 e^{-t/t_0} \end{aligned}\right\} \text{ für } t > 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Nach (28) lautet die Lösung dieser Aufgabe

$$T(x_1, x_2, x_3, t) = \left(1 - \frac{\overline{W} t_0}{T_a + \overline{W} t_0}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{l,m,n} \cos k_{1l} x_1 \cos k_{2m} x_2 \cos k_{3n} x_3 \, e^{-a^2(k_{1l}^2 + k_{2m}^2 + k_{3n}^2)t}$$

$$+ \frac{\overline{W} t_0}{T_a + \overline{W} t_0} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{l,m,n} \cos k_{1l} x_1 \cos k_{2m} x_2 \cos k_{3n} x_3 \, \frac{e^{-t/t_0} - e^{-a^2(k_{1l}^2 + k_{2m}^2 + k_{3n}^2)t}}{a^2(k_{1l}^2 + k_{2m}^2 + k_{3n}^2)\, t_0 - 1}$$

$$+ W t_0 e^{-t/t_0}$$

mit

$$A_{l,m,n} = \frac{8(T_a + \overline{W} t_0) \sin k_{1l} s_1 \sin k_{2m} s_2 \sin k_{3n} s_3}{k_{1l} k_{2m} k_{3n}\left(s_1 + \frac{\lambda}{\alpha}\sin^2 k_{1l} s_1\right)\left(s_2 + \frac{\lambda}{\alpha}\sin^2 k_{2m} s_2\right)\left(s_3 + \frac{\lambda}{\alpha}\sin^2 k_{3n} s_3\right)}.$$

Die k_{1l}, k_{2m}, k_{3n} sind die Wurzeln der Eigenwertgleichungen

$$\operatorname{ctg} k_i s_i = \frac{\lambda}{\alpha s_i} k_i s_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Für die gesuchte Temperaturverteilung $\overline{T}(x_1, x_2, x_3, t)$ ergibt sich damit schließlich

$$\overline{T}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{l,m,n} \cos k_{1l} x_1 \cos k_{2m} x_2 \cos k_{3n} x_3 \, e^{-a^2(k_{1l}^2 + k_{2m}^2 + k_{3n}^2)t}$$

$$+ \frac{\overline{W} t_0}{T_a + \overline{W} t_0} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{l,m,n} \cos k_{1l} x_1 \cos k_{2m} x_2 \cos k_{3n} x_3$$

$$\times \frac{e^{-t/t_0} - a^2(k_{1l}^2 + k_{2m}^2 + k_{3n}^2)\, t_0\, e^{-a^2(k_{1l}^2 + k_{2m}^2 + k_{3n}^2)t}}{a^2(k_{1l}^2 + k_{2m}^2 + k_{3n}^2)\, t_0 - 1}.$$

Wir bemerken noch, daß sich analoge Probleme mit zeitlich und örtlich veränderlichen Temperaturen der umgebenden Medien auf Grund der allgemeinen Theorie genau so einfach lösen lassen. Damit ist die Möglichkeit gegeben, die bei *K. Hirschfeld* eingeführte Beschränkung auf das Eindimensionale fallen zu lassen und darüber hinaus auch verwickeltere Aufgaben zu lösen.

6. Zusammenfassung. Gesteuerte Wärmeleitvorgänge, d. h. solche, bei denen verschiedene Teiloberflächen eines festen Körpers von Medien umgeben sind, deren Temperaturen sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängen und außerdem im Körper selbst noch innere Wärme entwickelt werden kann, sind für die Technik von besonderer Bedeutung. Es wird deshalb mittels gewisser Einflußfunktionen ein Theorem abgeleitet, welches die allgemeinste Aufgabe dieser Art löst. Sowohl die Einflußfunktionen als auch der Lösungsansatz sind physikalisch sehr einfach zu deuten. Aus dem allgemeinen Resultat werden dann einige Sonderfälle hergeleitet, unter anderem das Ergebnis von *A. Kneschke*, der erstmals ein spezielles, gesteuertes Wärmeleitproblem auf diese Weise gelöst hat. Am Beispiel eines endlichen Zylinders und eines Betonquaders wird abschließend die Brauchbarkeit der vorgetragenen Theorie gezeigt.

(Eingegangen am 1. August 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *H. Jäckel*, Colmnitz A 47, Kreis Freital (Sachsen).

Soeben erschien:

Kerbspannungslehre

Grundlagen für genaue Festigkeitsberechnung mit Berücksichtigung von Konstruktionsform und Werkstoff

Von

Dr.-Ing. H. Neuber

o. Professor für Technische Mechanik an der Technischen Hochschule München
Direktor des Staatl. Materialprüfamts für den Maschinenbau, München

Zweite erweiterte Auflage

Mit 162 Abbildungen im Text und auf 10 Tafeln. IX, 226 Seiten Gr.-8°. 1958. Ganzleinen DM 36,—

Inhaltsübersicht: **I. Einführung und Übersicht:** Entstehung der Festigkeitslehre. Erkenntnis des Formeinflusses. Aufstellung einer genaueren Spannungsverteilungstheorie. — **II. Grundbegriffe der Kerbwirkung:** Die Formzahl. Das Abklingungsgesetz. Grundform der Kerben. Die Formzahl der beliebig tiefen Kerbe. — **III. Grundlagen der Spannungslehre:** Das Gleichgewicht der Spannungen. Die Formänderung. Die Formänderung in krummlinigen Korodinaten. Das Hookesche Gesetz. Aufstellung der Grundgleichungen. Der Drei-Funktionen-Ansatz. Der Rechnungsgang in krummlinigen Koordinaten. — **IV. Theorie der ebenen Kerbwirkung:** Die Ausgangsgleichungen. Die beiderseitigen Außenkerbe. Die einseitige tiefe Außenkerbe. Bohrung und Langloch im sehr breiten Stab. Die flache Außenkerbe. Aufstellung der Formzahlnomogramme für Außenkerbe, Bohrung und Langloch von beliebigen Abmessungen. Der Vorsprung (Kerbwirkung durch Werkstoffanhäufung). Kerbprobleme bei Plattenbiegung. — **V. Theorie der räumlichen Kerbwirkung:** Die Ausgangsgleichungen. Lösung der Potentialgleichung in Ellipsoidkoordinaten. Die tiefe Umdrehungsaußenkerbe. Die flache Umdrehungsinnenkerbe ohne axiale Bohrung. Die Umdrehungskerben mit zweidimensionalem Spannungsverlauf. Aufstellung der Formzahlnomogramme für Umdrehungskerben mit beliebigen Abmessungen. — **VI. Theorie der prismatischen Kerbwirkung:** Die Ausgangsgleichungen. Vollquerschnitte (Stäbe mit Längsnut). Dünnwandige Hohlquerschnitte. Wellen mit Querbohrung. — **VII. Theorie der Entlastungskerben:** Begriffserklärung. Entlastungskerben bei Drillingsbeanspruchung. Allgemeine Eigenschaften der Formzahl bei Entlastungskerben. — **VIII. Theorie der Spitzkerben:** Das Versagen der klassischen Elastizitätslehre bei Spiztkerben und seine Ursache. Das neue Gedankenmodell. Theorie der Spitzkerbenformzahl. Weitere Gesichtspunkte. — **IX. Theorie des Flankenwinkels:** Ausgangsgleichungen. Der Einfluß des Flankenwinkels bei flachen Kerben. Der Einfluß des Flankenwinkels bei tiefen Kerben. Die beliebig tiefe Kerbe. — **X. Theorie der Spannungsverteilung in Kerben für nichtlineares Spannungs-Dehnungs-Gesetz:** Der Formänderungszustand. Formulierung des mathematischen Problems in kartesischen Koordinaten. Formulierung des mathematischen Problems mit Bezug auf die Spannungslinien und die Linien konstanter Verwölbung Das Abbildungsgesetz. Die flache Kerbe bei nicht-linearem Formänderungsgesetz. Die tiefe Kerbe. Übersicht über die Ergebnisse der nicht-linearen Theorie. — **XI. Spannungsverteilung bei teilweiser Plastizierung.** — **XII. Vergleich der Theorie mit experimentellen und theoretischen Ergebnissen anderer Forscher.** — **XIII. Einfluß der Kerbwirkung auf die Torsionssteifigkeit.** — **XIV. Die Formzahldiagramme und ihre Handhabung:** Erläuterung zu den Diagrammen. Anwendungsbeispiele. — **XV. Schlußbemerkung und Ausblick.** — Anhang: Nachweis der Existenzmöglichkeit eines Formänderungsenergiepotentials im Falle nicht-linearer Spannungs-Dehnungs-Gleichungen. — **Namenverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik

Von Dr. **Karl-Richard Dorfner**, München. (Ergebnisse der angewandten Mathematik 3. Heft.) Mit 44 Abbildungen. VII, 150 Seiten Gr.-8°. 1957. DM 26,—

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der angewandten Mathematik" zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

Inhaltsübersicht: Einleitung. — **I. Physikalische und mathematische Grundlagen.** Grundgleichungen. Linearisierung. Analysis unstetiger Funktionen. — **II. Allgemeine Strömungsfelder.** Lösungsprinzip und Darstellungsformeln. Dickenproblem bei gegebener Geometrie und Auftriebsproblem bei gegebener Druckverteilung des Tragflügels. Auftriebsproblem bei gegebener Geometrie und Dickenproblem bei gegebener Druckverteilung des Tragflügels,. — **III. Strömungsfelder mit konischer Symmetrie.** Grundlegende Beziehungen. Dreieckstragflügel mit konstantem Anstellwinkel. Dreieckstragflügel mit nichtkonstantem Anstellwinkel. Überlagerung konischer Strömungsfehler. — **IV. Homogene Strömung.** Verallgemeinerung der Formeln für konische Strömungsfelder. Die Behandlung homogener Strömungsfelder mit Unterschallkanten nach dem Singularitätenverfahren. — **Literaturverzeichnis.** — **Namen- und Sachverzeichnis.**

Soeben erschien:

Theorie schallnaher Strömungen

Von Dr.-Ing. habil. **K. G. Guderley.** Mit 125 Abbildungen. XV, 376 Seiten Gr.-8°. 1957.
Ganzleinen DM 42,—

Inhaltsübersicht: I. Allgemeine Grundlagen. — II. Vereinfachung der Strömungsdifferenzialgleichungen, Ähnlichkeitsgesetz für schallnahe Strömungen. — III. Linearisierte Behandlung schallnaher Strömungen. — IV. Exakte Lösungen der Potentialgleichung für schallnahe Strömungen. — V. Die Grundlagen der Hodographenmethode. — VI. Diskussion schallnaher Strömungsfelder mit Hilfe des Hodographen. — VII. Patikularlösungen der Tricomischen Gleichung. — VIII. Strömungen mit der Machschen Zahl 1. — IX. Strömungsfelder, die nur wenig von einer Strömung mit der Mach-Zahl 1 abweichen. — X. Einzeluntersuchungen, die Partikularlösungen der Form Gl. (VII 3.3) benutzen. — XI. Achsensymmetrische Strömungen. — Literaturverzeichnis. — Sachverzeichnis.

Das Verhalten von Gasströmungen zeigt weitgehende Verschiedenheiten, je nachdem die Strömungsgeschwindigkeit kleiner oder größer als die Schallgeschwindigkeit ist. Der Übergang von einer Form zur anderen, das „schallnahe" Gebiet, bereitet für das Verständnis besondere Schwierigkeiten, sowohl vom physikalischen als vom mathematischen Standpunkt aus. Jedoch ist in den letzten zwölf Jahren auch hier ein gesicherter Kern der Erkenntnis geschaffen worden. Das vorliegende Buch stellt erstmalig die Theorie schallnaher Strömungen im Zusammenhang dar. Die Forschung auf diesem Gebiete ist durch eine besondere enge Wechselwirkung zwischen physikalischem und mathematischem Denken gekennzeichnet. Das bestimmt auch den Charakter dieses Buches. Es zeigt die mathematische Theorie, wie sie aus physikalischen Vorstellungen herauswächst. Dabei führt es auch in die mathematischen Fragen ein, die hier entstehen und die gelegentlich über die klassischen Fragenstellungen hinausgehen. Doch wird auch dann der Versuch gemacht, durch physikalische Vergleiche die mathematischen Ergebnisse anschaulich zu machen. Die Darstellung ist für den Aerodynamiker, der einige mathematische Erfahrung besitzt, bestimmt; aber auch dem Mathematiker kann das Buch als Einführung in die Probleme des schallnahen Gebiets von Wert sein.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 0,8 K.B./Z. 040.